A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

Nova

VENDA PROIBIDA

PNLD 2002

FNDE

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

CÓDIGO: 62030-0 TIPO: L

6

Giovanni
Castrucci
Giovanni Jr.

FTD

A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

Nova

José Ruy Giovanni

Bacharel e licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP).
Professor de Matemática em escolas de 1º e 2º graus desde 1960.

Benedito Castrucci

(Falecido em 2/1/1995)

Bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de São Paulo (USP).
Ex-professor de Matemática da Pontifícia Universidade Católica e da Universidade de São Paulo.
Ex-professor de escolas públicas e particulares de 1º e 2º graus.

José Ruy Giovanni Jr.

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).
Professor de Matemática em escolas de 1º e 2º graus desde de 1985.

IMPORTANTE

ESTE LIVRO FOI REVISADO DE ACORDO COM AS OBSERVAÇÕES DA AVALIAÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DO MEC-SEF/FNDE.

6

FTD

Todos os direitos de edição reservados à

EDITORA FTD S.A.
Matriz: Rua Rui Barbosa, 156 (Bela Vista) São Paulo - SP
CEP 01326-010 - Tel. (0-XX-11) 253-5011- Fax (0-XX-11) 284-8500 r. 298
Caixa Postal 65149 - CEP da Caixa Postal 01390-970
Internet: http://www.ftd.com.br
E-mail: exatas@ftd.com.br

Editora: Júnia La Scala

Editores assistentes: Arnaldo Rodrigues
Dario Martins de Oliveira
Fabiano A. L. Wolff
Maria Ângela Pontual

Preparação: Alessandra Abramo

Revisão: Fausto Alves Barreira Filho
Solange Martins

Iconografia
Coordenação: Sônia Oddi
Pesquisa: Elizete Moura Santos
Assistente: Maria Rosa Alexandre

Edição de arte e projeto gráfico: Maria Paula Santo Siqueira

Capa: Arte Nova E. G. sobre imagem de Corel Stock Photo (Edwin Aldrin caminha na superfície da Lua, marcando a conquista do espaço pelo homem.)

Ilustrações: Abê, Alberto De Stefano,Fê, Marcos Aurélio Neves Gomes

Desenhos gráficos: Eunice Toyota

Editoração eletrônica/diagramação: EXATA editoração eletrônica

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Giovanni, José Ruy, 1937 -
A conquista da matemática - Nova / José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci, José Ruy Giovanni Jr. — São Paulo : FTD, 1998. — (Coleção a conquista da matemática)

ISBN 85-322- 4107 -7

Edição não-consumível.
Obra em 4 v. para alunos de 5ª a 8ª séries.
Suplementado pelo livro do professor.

1. Matemática (Ensino fundamental)
I. Castrucci, Benedito, 1909 - II. Giovanni Júnior, José Ruy, 1963 - III. Título. IV. Série.

98-3263 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Ensino fundamental 372.7

FTD

APRESENTAÇÃO

A Matemática é geralmente considerada uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra de um gabinete fechado, onde não entram ruídos do mundo exterior, nem o sol, nem os clamores do homem.

Porém, isso só em parte é verdadeiro.

(Bento de Jesus Caraça, matemático português, 1901-1948)

A Matemática está presente em nossas vidas, desde uma simples contagem até o uso em complexos computadores.

Pode parecer, a princípio, que alguns temas da Matemática não têm aplicação imediata no mundo em que vivemos; isso pode gerar em você um certo desapontamento. Na verdade, a aplicação da Matemática no cotidiano ocorre como resultado do desenvolvimento e do aprofundamento de certos conceitos nela presentes. Veja na Economia, por exemplo, o cálculo de juros e porcentagem; na Engenharia os cálculos trigonométricos.

Para entender a Matemática e suas aplicações são necessários dedicação e estudo. Por esse motivo, ao escrever esta coleção, procuramos apresentar a você, as linhas mestras desse processo em linguagem simples, sem fugir ao rigor que a Matemática exige.

Os autores

SUMÁRIO

1 Potências e raízes

1. Potência de um número racional ____ 10
2. Propriedades da potenciação ____ 11
3. Simplificação de uma expressão ____ 15
4. Números quadrados perfeitos ____ 16

2 O conjunto dos números inteiros

5. Introdução ____ 24
6. O conjunto dos números inteiros ____ 28
7. A reta numérica inteira ____ 28
8. Módulo de um número inteiro ____ 31
9. Comparação de números inteiros ____ 34
10. Adição de números inteiros ____ 39
11. Subtração de números inteiros ____ 49
12. Adição algébrica ____ 52
13. Multiplicação de números inteiros ____ 55
14. Divisão de números inteiros ____ 61
15. Potenciação de números inteiros ____ 63
16. Raiz quadrada exata de números inteiros ____ 67
17. Expressões numéricas ____ 69

3 O conjunto dos números racionais

18. O conjunto dos números racionais ____ 76
19. A reta numérica racional ____ 77
20. Adição algébrica de números racionais ____ 79
21. Multiplicação de números racionais ____ 82
22. Divisão de números racionais ____ 84
23. Potenciação de números racionais ____ 88
24. Raiz quadrada exata de números racionais ____ 93
25. Expressões numéricas ____ 96
26. Estudo das médias ____ 98

4 Estudando as equações

27. Igualdade ____ 104
28. Equações ____ 106

29. Conjunto universo e conjunto solução de uma equação 109
30. Equações equivalentes 112
31. Equações do 1º grau com uma incógnita 118
32. Resolvendo uma equação do 1º grau com uma incógnita 119
33. Usando equações na resolução de problemas 127
34. Aplicação das equações: as fórmulas matemáticas 132
35. Equação do 1º grau com duas incógnitas 135
36. Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas 139

5 Estudando as inequações

37. Desigualdade 150
38. Inequação 152
39. Inequação do 1º grau com uma incógnita 155

6 Razões e proporções

40. Razão 164
41. Algumas razões especiais 168
42. Proporção 177
43. Propriedade fundamental das proporções 179
44. Outras propriedades das proporções 183

7 Grandezas proporcionais: regra de três

45. Números direta e inversamente proporcionais 194
46. Regra de três simples 204
47. Regra de três composta 207

8 Porcentagem e juro simples

48. Porcentagem 214
49. Juro simples 222

9 Estudando os ângulos

50. O ângulo e seus elementos ____ 228
51. Medida de um ângulo ____ 229
52. Operações com medidas de ângulos ____ 233
53. Ângulos consecutivos e ângulos adjacentes ____ 238
54. Bissetriz de um ângulo ____ 240
55. Ângulo reto, ângulo agudo e ângulo obtuso ____ 243
56. Ângulos complementares e ângulos suplementares 245
57. Ângulos opostos pelo vértice ____ 249

10 Estudando triângulos e quadriláteros

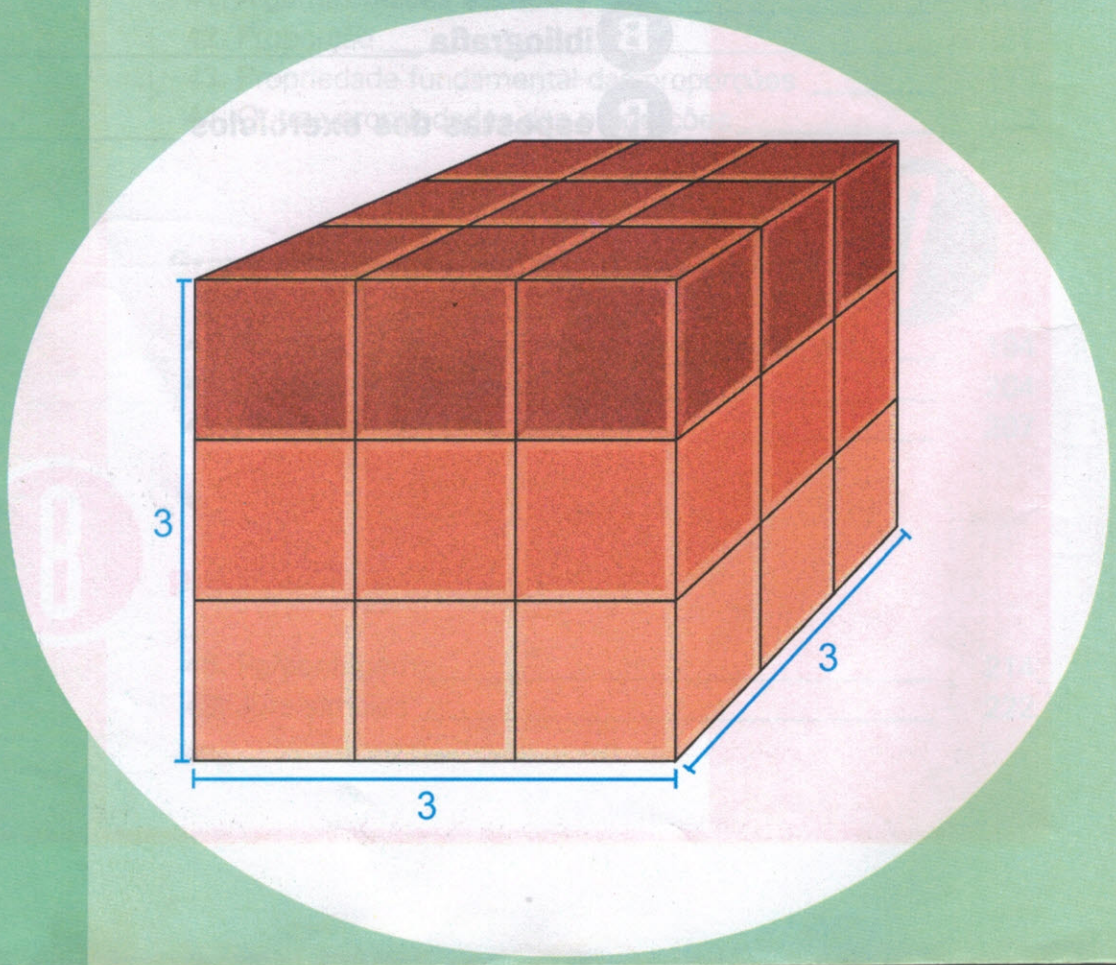
58. O triângulo e seus elementos ____ 258
59. Reconhecendo triângulos ____ 258
60. Uma relação entre as medidas dos ângulos do triângulo ____ 260
61. Os quadriláteros e seus elementos ____ 263
62. Conhecendo alguns quadriláteros especiais ____ 263

Bibliografia ____ 266

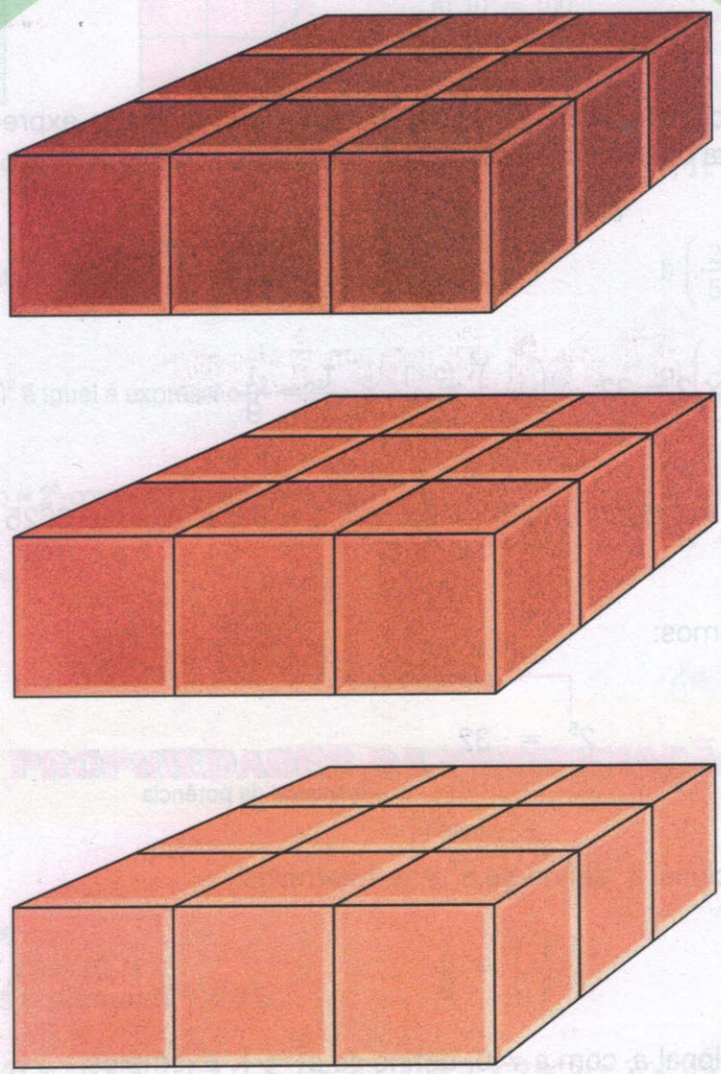
Respostas dos exercícios ____ 267

1 Potências e raízes

Observe a figura de um *cubo*.



Desdobrando o cubo em camadas, temos:



Note que em cada camada há (3×3) cubos menores. Como são três as camadas, na figura original há $3 \times (3 \times 3)$ cubos menores.

Assim, a quantidade de cubos menores que existe na figura original pode ser calculada pela multiplicação:

$$3 \times 3 \times 3$$

ou na forma abreviada, 3^3 (lê-se: *cubo de 3*).

A palavra cubo vem da forma da figura geométrica original.

POTÊNCIA DE UM NÚMERO RACIONAL

Você já sabe que:

❖ Dado um número racional *a* e um número natural *n*, com $n > 1$, a expressão a^n chama-se *potência* e representa uma multiplicação de *n* fatores iguais ao número *a*.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fatores}}$$

Exemplos:

$2^5 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{5 \text{ fatores}} = 32$ $\qquad \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}_{2 \text{ fatores}} = \frac{1}{9}$

$10^3 = \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{3 \text{ fatores}} = 1\,000$ $\qquad (0{,}5)^4 = \underbrace{0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5}_{4 \text{ fatores}} = 0{,}0625$

Em uma potência, temos:

$2^5 = 32$

expoente

resultado da potência

base

❖ Dado um número racional *a*, define-se $a^1 = a$. Exemplos:

$6^1 = 6$ $\qquad \left(\frac{1}{9}\right)^1 = \frac{1}{9}$ $\qquad (1{,}7)^1 = 1{,}7$

❖ Dado um número racional *a*, com $a \neq 0$, define-se $a^0 = 1$. Exemplos:

$5^0 = 1$ $\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ $\qquad (2{,}4)^0 = 1$

FIXAÇÃO

1 Escreva sob a forma de potência:

a) $7 \times 7 \times 7$

b) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

c) $a \times a$

d) $\underbrace{8 \times 8 \times 8 \times \ldots \times 8}_{10 \text{ fatores}}$

e) $\underbrace{y \times y \times y \times \ldots \times y}_{25 \text{ fatores}}$

f) $\frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$

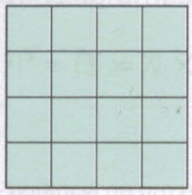
g) $0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9$

h) $\underbrace{\left(\frac{3}{10}\right) \times \left(\frac{3}{10}\right) \times \ldots \times \left(\frac{3}{10}\right)}_{20 \text{ fatores}}$

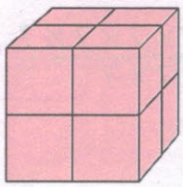
i) $\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \ldots \times \left(\frac{1}{2}\right)}_{16 \text{ fatores}}$

2 Escreva a potência que cada figura sugere:

a)



b)



3 Escreva a expressão $(0,4)^2$ na forma de fração irredutível.

4 Qual a diferença entre o dobro de 0,9 e o quadrado de 0,9?

5 A expressão $(9 + 2)^2$ é igual à expressão $9^2 + 2^2$?

6 Sendo $a = 2^3 \times 2^2$ e $b = 2^5$, compare os números a e b.

7 Se 20% = 0,2, determine o quadrado de 20%.

8 Determine o número que se deve colocar no lugar de x para que se tenha:

a) $10^x = 100$ c) $x^2 = 0$

b) $8^x = 1$ d) $x^5 = 1$

9 Calcule:

a) 10^3 e) 11^2 i) $\left(\frac{7}{11}\right)^0$

b) 2^4 f) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ j) $(1,7)^2$

c) 7^3 g) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ l) $(0,3)^3$

d) 25^2 h) $\left(\frac{9}{5}\right)^2$ m) $(1,8)^0$

2 PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

1ª propriedade

Consideremos o produto $2^3 \times 2^7$.

$$2^3 \times 2^7 = \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{2^3} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)}_{2^7} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{10 fatores}} = 2^{10}$$

potências de mesma base

Logo, $2^3 \times 2^7 = 2^{10}$ ou 2^{3+7}.

Um produto de potências de mesma base pode ser escrito na forma de uma única potência. Para isso, conservamos a base e *adicionamos os expoentes*.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$, sendo $a \neq 0$

Veja os exemplos:

$3^5 \times 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$

$\left(\frac{4}{7}\right)^2 \times \left(\frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^{2+1+3} = \left(\frac{4}{7}\right)^6$

2ª propriedade

Consideremos o quociente $7^5 : 7^2$.

$$7^5 : 7^2 = \underbrace{(7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7)}_{7^5} : \underbrace{(7 \times 7)}_{7^2} = \frac{\cancel{7} \times \cancel{7} \times 7 \times 7 \times 7}{\cancel{7} \times \cancel{7}} = 7 \times 7 \times 7 = 7^3$$

potências de mesma base

Logo, $7^5 : 7^2 = 7^3$ ou 7^{5-2}.

Um quociente de potências de mesma base, onde o expoente do dividendo é maior ou igual ao expoente do divisor, pode ser escrito na forma de uma única potência. Para isso, conservamos a base e *subtraímos os expoentes*.

$a^m : a^n = a^{m-n}$, com $a \neq 0$ e $m \geqslant n$

Veja os exemplos:

$10^9 : 10^4 = 10^{9-4} = 10^5$

$\left(\frac{3}{4}\right)^4 : \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^{4-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

$11^5 : 11^5 = 11^{5-5} = 11^0$

$(2{,}3)^6 : (2{,}3)^5 = (2{,}3)^{6-5} = (2{,}3)^1 = 2{,}3$

3ª propriedade

Consideremos as potências $(5^2)^3$.

$$\underbrace{(5^2)^3}_{\text{potência de uma potência}} = \underbrace{5^2 \times 5^2 \times 5^2}_{\text{3 fatores}} = 5^{2+2+2} = 5^6$$

Logo, $(5^2)^3 = 5^6$ ou $5^{2 \times 3}$.

Uma potência de uma potência pode ser escrita na forma de uma única potência. Para isso, conservamos a base inicial e *multiplicamos os expoentes*.

$(a^m)^n = a^{m \times n}$, com $a \neq 0$

Veja os exemplos:

$(6^2)^5 = 6^{2 \times 5} = 6^{10}$

$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{4 \times 6} = \left(\frac{1}{3}\right)^{24}$

4ª propriedade

Consideremos a potência $(2 \times 7)^3$.

$$(2 \times 7)^3 = (2 \times 7) \times (2 \times 7) \times (2 \times 7) = 2 \times 7 \times 2 \times 7 \times 2 \times 7 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 7^3$$

3 fatores

potência de um produto

Logo, $(2 \times 7)^3 = 2^3 \times 7^3$.

Para elevarmos um produto de dois ou mais números racionais a um expoente, podemos *elevar cada fator a esse expoente.*

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Veja os exemplos:

1. $(3 \times 11)^4 = 3^4 \times 11^4$
2. $(5^2 \times 7^3)^2 = (5^2)^2 \times (7^3)^2 = 5^4 \times 7^6$
3. $\left[\left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)\right]^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$
4. $[(0,7)^3 \times (0,5)]^5 = [(0,7)^3]^5 \times (0,5)^5 = (0,7)^{15} \times (0,5)^5$

Essa mesma propriedade pode ser aplicada quando temos um quociente. Exemplos:

$(7 : 6)^3 = 7^3 : 6^3$ $\qquad$ $(3 : 5^2)^4 = 3^4 : (5^2)^4 = 3^4 : 5^8$

Potências de base dez

Vamos recordar que o inteiro positivo 10^n, para *n* natural, se escreve:

$$10^n = \underbrace{1000...0}_{n \text{ zeros}}$$

Assim, a potência de base 10, com expoente natural $n \neq 0$, é a maneira condensada de escrever o número que, no sistema decimal de numeração, é representado por 1 seguido de *n* zeros.

Observe:

$10^5 = 100\,000$; $10^2 = 100$; $10^1 = 10$.

As potências de base 10 acima mencionadas são úteis para escrever números muito grandes. Veja os exemplos:

1. O número 27 000 000 pode ser escrito de modo abreviado como 27×10^6.
2. A distância da Terra à Lua, que é aproximadamente 400 000 km, pode ser indicada por 4×10^5 km.

FIXAÇÃO

1 Aplicando as propriedades da potenciação, transforme em uma única potência:

a) $7^5 \times 7^4$

b) $(13^2)^6$

c) $10^9 \times 10 \times 10^3$

d) $(7^4)^4$

e) $8^5 : 8^4$

f) $a^{12} \times a \times a^{10}$

g) $(x^{10})^3$

h) $(0,6)^{10} : (0,6)^7$

i) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^3$

j) $\left(\frac{7}{9}\right)^{20} : \left(\frac{7}{9}\right)^{15}$

l) $(0,9)^8 \times (0,9) \times (0,9)^3$

m) $\left(\frac{1}{2}\right)^8 ; \left(\frac{1}{2}\right)^8$

n) $[(1,7)^{10}]^4$

o) $[(a^6)^2]^3$

2 Sabendo que $a = 2^{13}$, $b = 2^7$, $c = 2^5$, determine na forma de potência:

a) $a \times b$

b) $b : c$

c) $a \times c$

d) $a : b$

e) a^2

f) b^3

g) $a \times b \times c$

h) $a : c$

i) c^4

3 Sabendo que $x = 10^4$ e $y = 10^3$, e usando os sinais $=$ ou $\neq$, compare as potências x^3 e y^4.

4 Transforme as seguintes expressões num produto ou num quociente de potências:

a) $(7 \times 17)^2$

b) $(5 \times 11 \times 23)^3$

c) $(2^3 \times 3)^4$

d) $(3^5 : 5^2)^2$

e) $[(0,6) \times (1,1)]^4$

f) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)\right]^3$

g) $\left[\left(\frac{1}{7}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)\right]^7$

h) $(x^7 : y^4)^2$

i) $(m^6 \times n^5 \times p)^2$

j) $[(2,3)^4 : (2,1)^5]^3$

5 Sabendo que $a \times b = 6$, calcule o valor de:

a) $a^2 \times b^2$

b) $a^3 \times b^3$

6 Se $a^2 \times b^2 = 49$, qual é o valor de $a \times b$?

7 Escreva os seguintes números na forma de potência de base 10:

a) mil

b) dez mil

c) dez milhões

d) um bilhão

8 As unidades usuais de medida são o metro, o grama e o litro. Seus múltiplos são precedidos de prefixos como os apresentados a seguir:

giga: 1 000 000 000

mega: 1 000 000

miria: 10 000

quilo: 1 000

hecto: 100

deca: 10

Escreva no seu cadeno esses prefixos e indique as potências de base 10 correspondentes.

9 Utilize potências de dez para indicar os seguintes números:

a) 35 000

b) 60 000 000

c) 920 000

d) 92 000 000 000

10 A distância da Terra ao Sol é de, aproximadamente, 150 000 000 km. Escreva essa distância utilizando potência de base 10.

11 O valor aproximado do raio terrestre é 6 400 km. Qual é o número que representa essa medida em metros? Escreva a resposta usando potência de base 10.

SIMPLIFICAÇÃO DE UMA EXPRESSÃO

Utilizando as propriedades da potenciação, podemos simplificar certas expressões e tornar mais fácil o cálculo do seu valor.

Consideremos os exemplos:

1. Calcular o valor da expressão $(2^6 \times 2^7 \times 2^5) : (2^3)^5$.

Como todas as potências têm a mesma base, podemos escrever:

$(2^6 \times 2^7 \times 2^5) : (2^3)^5 =$

multiplicação de potências de mesma base e potência de uma potência

$= 2^{18} : 2^{15} =$

divisão de potências de mesma base

$= 2^3 = 8$

2. Escrever a forma mais simples da expressão $(2 \times 3)^5 \times 2^2 \times 3$.

$(2 \times 3)^5 \times 2^2 \times 3 =$

transformando em produto de potências

$= 2^5 \times 3^5 \times 2^2 \times 3 =$

propriedade comutativa da multiplicação

$= 2^5 \times 2^2 \times 3^5 \times 3 =$

multiplicação de potências de mesma base

$= 2^7 \times 3^6$

3. Simplificar e calcular o valor da expressão $(81 \times 27) : 729$.

Vamos decompor 81, 27 e 729 em fatores primos:

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

27	3
9	3
3	3
1	

729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Daí, temos:

$$(81 \times 27) : 729 = (3^4 \times 3^3) : 3^6 = 3^7 : 3^6 = 3$$

4. Dados $a = 2^3 \times 3^2 \times 7$ e $b = 2^3 \times 3$, determine o quociente a : b.

$a : b = (2^3 \times 3^2 \times 7) : (2^3 \times 3) = (2^3 : 2^3) \times (3^2 : 3) \times 7 = 2^0 \times 3^1 \times 7 =$

$1 \times 3 \times 7 = 21$

FIXAÇÃO

1 Use as propriedades da potenciação e simplifique cada uma das seguintes expressões:

a) $(n^6 \times n^9 \times n^5) : n^{17}$

b) $(a^6)^3 : (a^{10} \times a^6)$

c) $(b^{10} \times b^{17} \times b^3) : (b^5 \times b^{17})$

d) $(x^{50} : x^{31}) : (x^4)^4$

2 Qual é o valor da expressão $[(1,1)^9 \times (1,1)^{11}] : [(1,1)^3]^6$?

3 Escreva na forma mais simples possível cada uma das expressões:

a) $(a \times b \times c)^5 \times (a \times b)^3 \times c^2$

b) $(a \times b)^2 \times (a^2 \times b^3)^2 \times (a^4 \times b)^3$

4 Calcule o valor da expressão

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^7 : \left(\frac{1}{2}\right)^6\right] \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} : \left(\frac{1}{2}\right)^8\right]$$

5 Qual é o número decimal *a* expresso por $[(0,4)^2]^{10} : [(0,4)^9 \times (0,4)^7 \times (0,4)]$?

6 Sabendo que $m = a^3 \times b^5$ e $n = a^4 \times b$, determine o produto $m \times n$.

7 Sendo $a = 2^7 \times 3^4 \times 7^2$, $b = 2^5 \times 3^2 \times 7$ e $c = 2^5 \times 3 \times 7$, calcule:

a) $a : b$ b) $a : c$ c) $b : c$

8 Calcule o valor da expressão $\dfrac{(10^4)^7}{(10^8 \times 10)^3}$.

9 Determine o quociente de $1\,024^2$ por 64^3.

10 Qual é a forma mais simples da expressão $(a^2 \times b)^2 \times (a^2 \times b^3 \times c)^3 \times (b \times c^2)^2$?

4 NÚMEROS QUADRADOS PERFEITOS

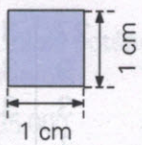
Qual é o número que obtemos quando elevamos 4 ao quadrado?

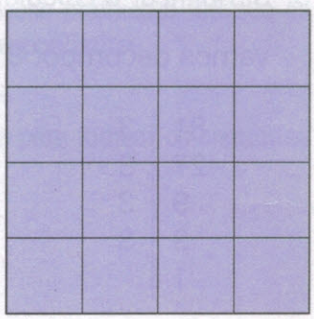
A resposta é 16, pois $4^2 = 4 \times 4 = 16$.

O número 16, que representa o quadrado de 4, é chamado *quadrado perfeito*.

Geometricamente, podemos mostrar que 16 é um número quadrado perfeito.

Consideremos um quadrado com 1 cm de lado. Se usarmos 16 desses quadrados, podemos formar um novo quadrado.





Dizemos, que:

> Os números naturais que são quadrados de outros números naturais são denominados *números quadrados perfeitos*.

Veja:

49 é um número quadrado perfeito, pois $49 = 7^2$.

121 é um número quadrado perfeito, pois $121 = 11^2$.

Daremos, a seguir, uma tabela de números naturais que são quadrados perfeitos.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
n^2	100	400	900	1 600	2 500	3 600	4 900	6 400	8 100	10 000

Como reconhecer se um número é quadrado perfeito

Reconhecer se um número é quadrado perfeito pelo processo geométrico é muito demorado e cansativo, principalmente se o número for grande.

Vejamos um processo mais simples e prático:

- Fazemos a fatoração completa do número.
- Se todos os fatores tiverem expoentes pares, o número será um quadrado perfeito. Caso um dos fatores não apresente expoente par, o número não será quadrado perfeito.

Veja os exemplos:

1. O número 144 é quadrado perfeito?

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$144 = 2^4 \times 3^2$

Como todos os fatores apresentam expoentes pares, o número 144 é um número quadrado perfeito.

2. Verificar se o número 450 é quadrado perfeito.

450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

Como o fator 2 não apresenta expoente par, o número 450 não é um número quadrado perfeito.

FIXAÇÃO

1 Desenhe um quadrado de 1 cm de lado. A seguir, responda:

a) Se você usar 25 desses quadrados, você pode formar um novo quadrado?

b) O número 25 é um quadrado perfeito?

2 Fazendo a fatoração completa, verifique quais números são quadrados perfeitos:

a) 180 d) 1 000 g) 1 600

b) 225 e) 1 024 h) 2 000

c) 729 f) 1 225 i) 2 025

3 A fatoração completa de um número é $2^4 \times 5^x \times 11^2$. Entre os números 6, 7, 9, 10 e 13 quais deles podem ser colocados no lugar do expoente x para que o número dado seja quadrado perfeito?

4 Um número cuja fatoração completa é $3^8 \times 11^4$ é quadrado perfeito? Justifique a sua resposta.

5 Um número a é expresso por $2^n \times 7^6$. Dê um algarismo que pode ser colocado no lugar do expoente n para que o número não seja quadrado perfeito.

Raiz quadrada exata de um número racional

Se um número representa um produto de dois fatores iguais, então cada fator é chamado *raiz quadrada* do número. Veja:

✓ O número 4 representa o produto 2×2 ou 2^2. Logo, 2 é raiz quadrada de 4.

Indica-se: $\sqrt{4} = 2$.

✓ O número $\frac{1}{9}$ representa o produto $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ ou $\left(\frac{1}{3}\right)^2$. Logo, $\frac{1}{3}$ é a raiz quadrada de $\frac{1}{9}$.

Indica-se: $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.

✓ O número 0,36 representa o produto $0{,}6 \times 0{,}6$ ou $(0{,}6)^2$. Logo, 0,6 é a raiz quadrada de 0,36.

Indica-se: $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

Vejamos, agora, como determinar a raiz quadrada exata de outros números. Observe os exemplos:

1. O número 1 024 é quadrado. Determinar sua raiz quadrada exata.

Vamos fazer a fatoração completa do número 1 024:

1 024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$$1\,024 = 2^{10} = (2^5)^2 = (32)^2 = 32 \times 32$$

Logo, $\sqrt{1\,024} = 32$.

2. Qual é a raiz quadrada do número $\frac{81}{121}$?

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

121	11
11	11
1	

$$\frac{81}{121} = \frac{3^4}{11^2} = \frac{(3^2)^2}{(11)^2} = \frac{(9)^2}{(11)^2} = \left(\frac{9}{11}\right)^2 = \frac{9}{11} \times \frac{9}{11}$$

Logo, $\sqrt{\frac{81}{121}} = \frac{9}{11}$.

3. Qual é a raiz quadrada exata do número 4,41?

$$4{,}41 = \frac{441}{100}$$

441	3
147	3
49	7
7	7
1	

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$$4{,}41 = \frac{441}{100} = \frac{3^2 \times 7^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{(3 \times 7)^2}{(2 \times 5)^2} = \frac{(21)^2}{(10)^2} = \left(\frac{21}{10}\right)^2 = (2{,}1)^2 = 2{,}1 \times 2{,}1$$

Logo, $\sqrt{4{,}41} = 2{,}1$.

FIXAÇÃO

1 Procure calcular mentalmente a raiz quadrada de cada um dos números:

a) 64

b) 49

c) $\frac{1}{25}$

d) $\frac{49}{9}$

e) 0,81

f) 0,36

g) 0,0004

h) 0,0016

2 Substitua a letra x pelo número que verifica cada uma das seguintes igualdades:

a) $x^2 = 81$

b) $x = \sqrt{100}$

c) $x^2 = \frac{9}{16}$

d) $x = \sqrt{\frac{1}{36}}$

e) $x^2 = 0{,}49$

f) $x = \sqrt{1{,}21}$

3 Qual é o valor de x na igualdade $x = \sqrt{\frac{169}{400}}$?

4 Se $n^2 = \frac{121}{196}$, qual é o valor de n?

5 Determine a raiz quadrada exata de cada um dos seguintes números:

a) 484
b) 729
c) 676
d) 256
e) 1 764
f) 2 304
g) 2 916
h) 4 096

6 Qual é o número que representa a raiz quadrada de $2^{10} \times 5^2 \times 7^2$?

7 Determine a raiz quadrada exata de cada um dos seguintes números:

a) 6,25
b) 0,0784
c) 12,25
d) 30,25
e) 0,1024
f) 51,84

8 Um número é expresso por $a^4 \times b^{10}$. Qual é a raiz quadrada desse número?

9 Sendo x a raiz quadrada de 2^{12}, qual é o valor de x?

10 Sendo $n^2 = 1\,521$, qual é o valor de n?

RETOMANDO o que aprendeu

1 Considere as igualdades:

a) $(3 + 5)^2 = 3^2 + 5^2$
b) $(10^2)^3 = 10^5$
c) $7 \cdot 7^2 = 7^3$

Quantas são verdadeiras?

2 As expressões $(2^5 : 2^2) : 2^2$ e $2^5 : (2^2 : 2^2)$ são iguais?

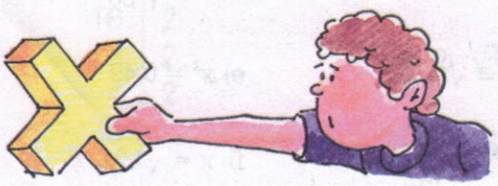
3 Sendo n um número expresso por $(2^7 : 2^4) - 2^2$, qual é o valor de n?

4 O número 2 916 é um número quadrado perfeito?

5 Qual é o valor da expressão $(10^2 \times 10)^7 : (10^4)^5$?

6 Sendo $x = 2^7 \times 3^8 \times 7$ e $y = 2^5 \times 3^6$, determine o quociente do número x pelo número y.

7 Determine o menor número natural, diferente de zero, que deve ser colocado no lugar do expoente x para que o número $3^6 \times 7^x$ seja quadrado perfeito.



8 Se $x = 3^6$ e $y = 9^3$, você pode dizer que os números x e y são iguais?

9 Qual é o menor número inteiro pelo qual devemos multiplicar $2^4 \times 3^2 \times 5^3$ para que este número se torne quadrado perfeito?

10 Se um número x é tal que $x = [4^7 \times 4^{10} \times 4]^2 : (4^5)^7$, qual é o valor do número x?

11 O número 27,04 é quadrado. Qual é a raiz quadrada exata desse número?

12 Qual é o valor da expressão $\sqrt{4} + \sqrt{0,64} - \sqrt{1,21}$?

13 Qual é a forma mais simples de escrever a expressão $(a^5 \times b^2)^3 \times b \times (a \times b^4)^2$?

14 Qual é a raiz quadrada exata da expressão $a^6 \times b^2 \times c^{10}$?

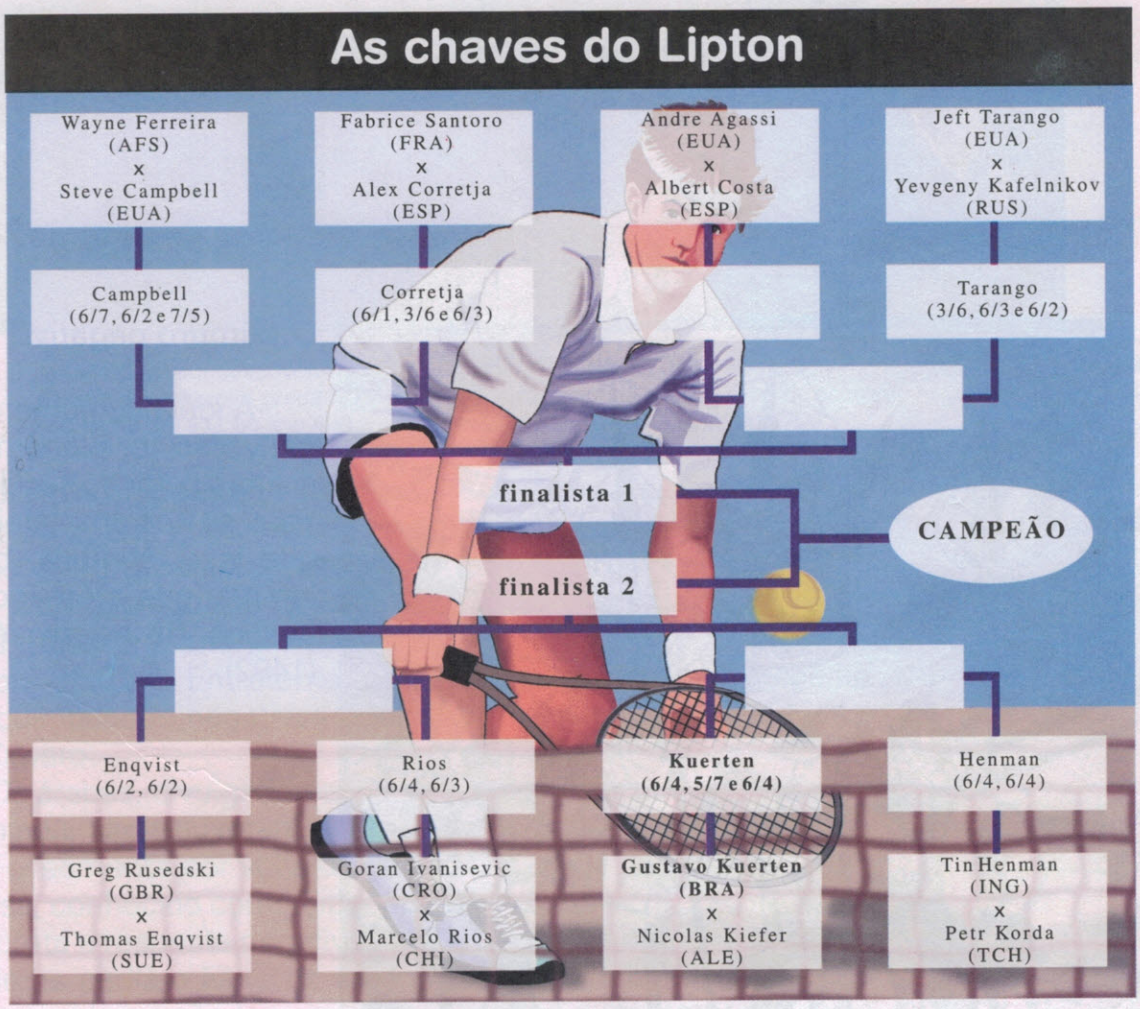
15 Sendo $x = \sqrt{0,81}$ e $y = \sqrt{0,0121}$, determine o valor de $x - y$.

JORNAIS & REVISTAS

A *Folha de S. Paulo* em 25 de março de 1998 apresentou uma matéria sobre a vitória de Gustavo Kuerten e sua volta ao ranking dos dez melhores tenistas (*top ten*).

Ele derrotou o alemão Nicolas Kiefer, 20, com 6/4, 5/7 e 6/4, passando às quartas-de-final do torneio Lipton, em Key Biscayne, Miami (EUA).

Nessa matéria, foi apresentado, também, o seguinte quadro.



1. Indique, na forma de potência de 2, o número de jogadores que participam:

a) das oitavas-de-final
b) das quartas-de-final
c) das semi-finais
d) da final

2. Quantos jogos Gustavo ainda deveria vencer para se tornar o campeão do torneio?

2

O conjunto dos números inteiros

O número negativo

A idéia de número negativo só foi plenamente aceita a partir do século XV. Para se ter uma idéia do que isso significa, basta lembrar que a América foi descoberta nesse século (1492).

Na Antigüidade, os gregos, por exemplo, que foram grandes pensadores e deram um grande desenvolvimento à Geometria, não conheciam o número negativo. Por outro lado, os hindus do século VII já usavam quantidades negativas.

O período de maior desenvolvimento da antiga civilização grega ocorreu do ano 1100 a.C. ao ano 400.

O período de maior desenvolvimento da antiga civilização hindu ocorreu do ano 2000 a.C. ao ano 700.

Um hindu, de nome Bramagupta, estabeleceu regras de sinais para operar com números negativos, envolvendo esses números em um pequeno círculo ou usando um apóstrofo sobre eles, para distingui-los dos demais. Outro notável matemático hindu, Bháskara, interpretava os números negativos como "perda" ou "dívida". Entretanto, os hindus se recusavam a aceitar que quantidades negativas pudessem ser expressas pela idéia de número.

Os árabes, divulgadores e continuadores da cultura matemática hindu, não trouxeram nenhum acréscimo a essa questão.

Foi somente por volta do século XIII que o italiano Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, em uma obra sobre Álgebra, interpreta a resposta negativa de um problema como número. O problema pedia o lucro de um comerciante. Fibonacci afirmou: "Este problema não tem solução, a menos que interpretemos a dívida como sendo um número negativo".

Assim, pouco a pouco, os números negativos foram aceitos como números até que, em 1659 (século XVI), letras foram usadas pela primeira vez para representar tanto os números positivos quanto os negativos.

INTRODUÇÃO

Os números naturais têm servido perfeitamente para expressar o resultado de uma contagem ou de uma medida.

Veja as seguintes afirmações:

- ✓ A estrada tem 45 km de comprimento.
- ✓ A idade de Karina é 13 anos.
- ✓ A capacidade do tanque de um carro é 56 ℓ.
- ✓ A classe onde Mariana estuda tem 27 alunos.

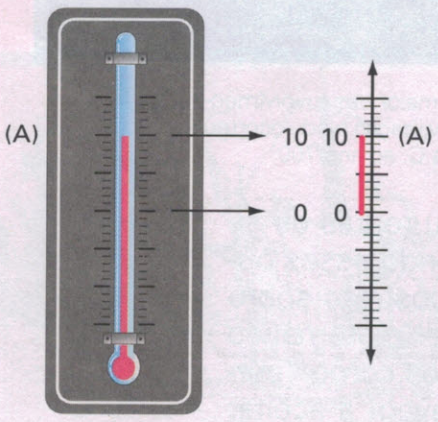
Você nota que todas essas afirmações não deixam dúvidas quanto ao seu significado, pois os números naturais envolvidos definem perfeitamente a quantidade.

Consideremos, agora, a seguinte situação:

Num determinado dia, um termômetro marca uma temperatura de 10 graus centígrados (10 °C).

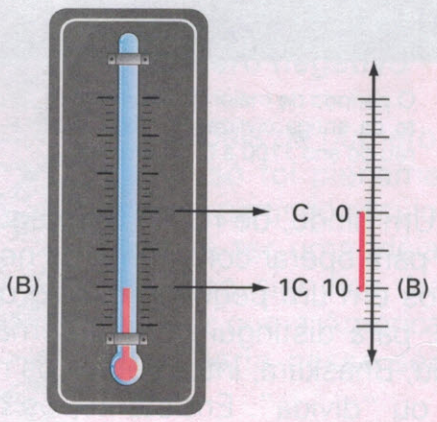
Podemos representar essa situação de duas maneiras:

a)



O ponto *A* do termômetro está distante 10 graduações do ponto de origem 0.

b)



O ponto *B* do termômetro está distante 10 graduações do ponto de origem 0.

Pelos gráficos, vemos que há *dois pontos* (*A* e *B*) do termômetro que podem ser tomados como a posição da coluna de mercúrio em relação ao ponto de origem 0. Isso mostra que o número natural 10 não foi suficiente para expressar, de modo a não deixar dúvidas, o afastamento da coluna de mercúrio em relação ao ponto de origem 0.

Para eliminarmos a possível confusão, convencionamos a seguinte leitura:

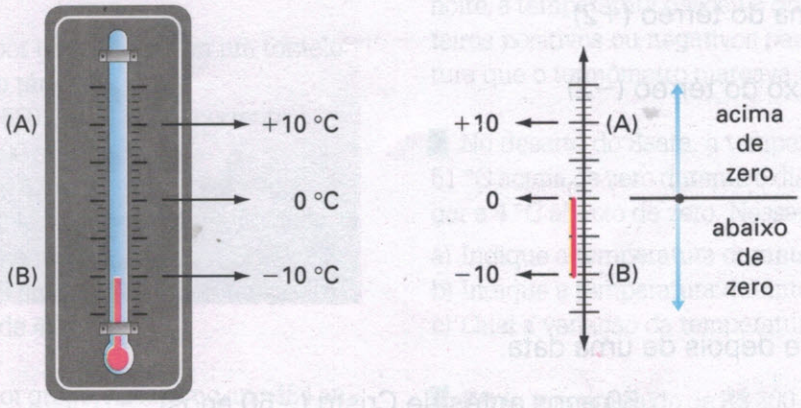
- ✓ O ponto *A* está 10 °C *acima de zero.*
- ✓ O ponto *B* está 10 °C *abaixo de zero.*

Simbolicamente, eliminamos a confusão antepondo o sinal + às medidas acima de 0 °C e o sinal − às medidas abaixo de 0 °C.

Assim:

ponto A ⟶ $+10\,°C$

ponto B ⟶ $-10\,°C$



A temperatura de 10 graus acima de zero é indicada pelo número +10 (lê-se: mais dez ou dez positivo). Dizemos que +10 é um *número inteiro positivo.*

A temperatura de 10 graus abaixo de zero é indicada pelo número −10 (lê-se: menos dez ou dez negativo). Dizemos que −10 é um *número inteiro negativo.*

Usamos os números positivos e os números negativos em muitas ocasiões:

❖ Nos saldos bancários:

Canadá Banco
C.G.C. 50.755.848

Extrato para Simples Conferência

Emissão 06 / 06 / 1998 | Folha 01

Nome: JOSÉ CARLOS COSTA MOURÃO | Agência: 0101-8 | Conta: 75.069-4

Cheque especial = limite 1.000, - venc. 09 / 07 / 1998

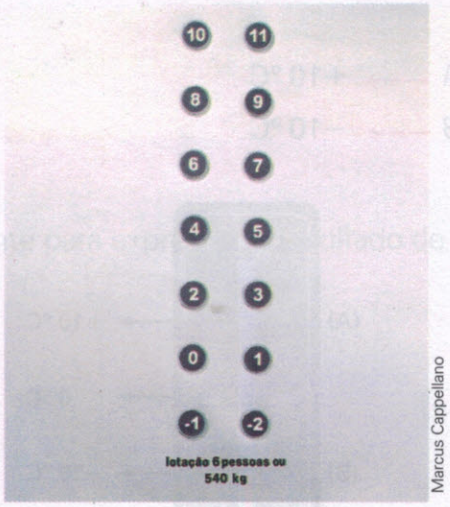
Data	Histórico	Documento	Débito / Crédito / Saldo
	SALDO EM 30/04/1998		502,92 CR
05 / 05	TARIFA EMIS.EXTRATO TERM	6950124	0,99-
50 / 05	AUTODEPOSITO	0078304	750,00
06 / 05	TARIFA FORN.TAL. CHEQUES	0002950	4,50-
07 / 05	GASTOS CARTAO DE CREDITO	4220724	180,47-
11 / 05	CHEQUE COMPENSADO	0002935	55,50-
15 / 05	CHEQUE COMPENSADO	0002936	47,00-
18 / 05	CPMF DE 07/05 A 13/05	0070423	0,10-
20 / 05	CONTA DE LUZ	4705052	28,55-
	SALDO EM 03/06/1998		1.055,50 CR

TAXA DE CHEQUE ESPECIAL 10,70 A.M.
MANTENHA ATUALIZADO SEU ENDEREÇO/TELEFONE, JUNTO A SUA AGÊNCIA.

crédito de R$ 1 000,00 (+R$ 1 000,00)

débito de R$ 1 000,00 (−R$ 1 000,00)

❖ Na localização de andares de um prédio em relação ao térreo.



Marcus Cappellano

2 andares acima do térreo (+2)

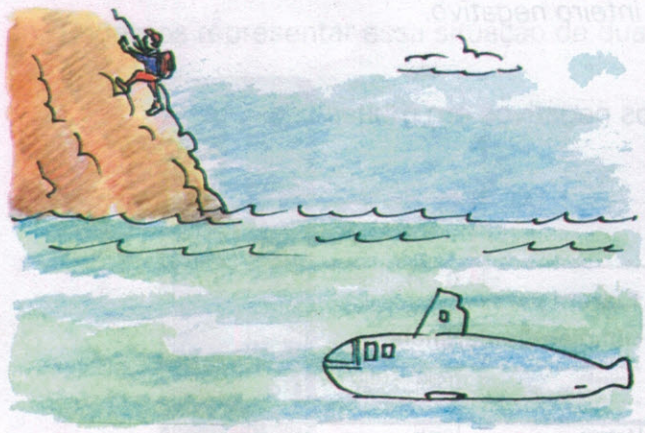
2 andares abaixo do térreo (−2)

❖ Período antes e depois de uma data.

50 anos antes de Cristo (−50 anos)

50 anos depois de Cristo (+50 anos)

❖ Na indicação de altitudes ou profundidades em relação ao nível do mar.



altitude de 30 m (+30 m)

profundidade de 30 m (−30 m)

❖ No saldo de gols de uma equipe.

saldo de 10 gols a favor (+10 gols)

saldo de 10 gols contra (−10 gols)

Note que, em todas as situações apresentadas, há um *referencial*, que tomamos como *origem*.

FIXAÇÃO

1 Usando números inteiros positivos ou negativos, indique:

a) 8 pontos perdidos por uma equipe em um torneio
b) 6 andares abaixo do térreo
c) um depósito de R$ 550,00 em conta corrente
d) uma altitude de 1 200 m
e) uma temperatura de 42 °C acima de zero
f) uma distância de 63 km ao norte de uma cidade
g) um saldo de 21 gols a favor
h) uma distância de 25 cm à esquerda de um ponto
i) uma profundidade de 4 000 m

2 Heródoto, historiador grego, nasceu no ano 484 antes de Cristo. Usando números inteiros positivos ou negativos, indique o ano em que ele nasceu.

3 O monte Aconcágua, na América do Sul, tem 6 959 m de altura. Use números inteiros positivos ou negativos para indicar essa altura.

Juca Martins/Prensa Três

4 O mar Morto, situado na Palestina, está 395 metros abaixo do nível do mar. Como você indica essa depressão usando números inteiros positivos ou negativos?

5 Uma equipe de futebol marcou 17 gols e sofreu 20 gols em um torneio. Use números inteiros positivos ou negativos para indicar o saldo dessa equipe.

6 Um termômetro marcava 6 °C durante a tarde. À noite, a temperatura desceu 8 graus. Use números inteiros positivos ou negativos para indicar a temperatura que o termômetro marcava à noite.

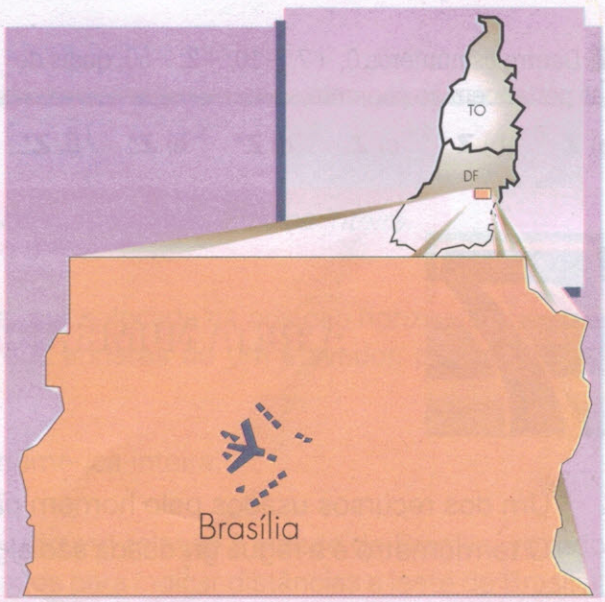
7 No deserto do Saara, a temperatura pode alcançar 51 °C acima de zero durante o dia e, à noite, pode chegar a 4 °C abaixo de zero. Nessas condições:

a) Indique a temperatura durante o dia.
b) Indique a temperatura durante a noite.
c) Qual a variação da temperatura?

8 Fábio tem um saldo de R$ 300,00 na conta corrente. Qual será o saldo (em números inteiros positivos ou negativos), se ele:

a) retirar R$ 250,00?
b) depositar R$ 200,00?
c) depositar R$ 100,00?
d) retirar R$ 320,00?

9 Um avião está sobrevoando um ponto *A* localizado 60 km a oeste de Brasília e está se dirigindo, em linha reta, para um ponto *B* localizado 30 km a leste de Brasília.



Usando números inteiros positivos ou negativos, indique:

a) a posição do ponto *A* em relação a Brasília
b) a posição do ponto *B* em relação a Brasília

10 Volte ao exercício anterior. Qual a distância do ponto *A* ao ponto *B* em linha reta?

O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Os números +1, +2, +3, +4, ..., +10, ..., +25, ... são chamados *números inteiros positivos*.

Os números inteiros positivos são identificados com os números naturais maiores que 0.

$+1 = 1; +2 = 2; ...; +10 = 10; ...; +25 = 25; ...; +100 = 100; ...$

Os números −1, −2, −3, −4, −5, ..., −10, ..., −25, ... são chamados *números inteiros negativos*.

O conjunto formado pelos inteiros positivos, pelos inteiros negativos e pelo zero é chamado *conjunto dos números inteiros* e é representado pela letra $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ...\}$

FIXAÇÃO

1 Dado o conjunto {0, +1, +2, +3, +4, ...}, dê o símbolo e o nome desse conjunto.

2 Dentre os números 0, +7, −10, +2, −50, quais deles pertencem ao conjunto:

a) $\mathbb{Z}$ b) $\mathbb{Z}_+$ c) $\mathbb{Z}_-$ d) $\mathbb{Z}^*$ e) $\mathbb{Z}^*_+$ f) $\mathbb{Z}^*_-$

3 Usando os símbolos $\in$ ou $\notin$, dê a relação entre:

a) +10 e $\mathbb{Z}$ c) −70 e $\mathbb{Z}_-$ e) +500 e $\mathbb{Z}^*$

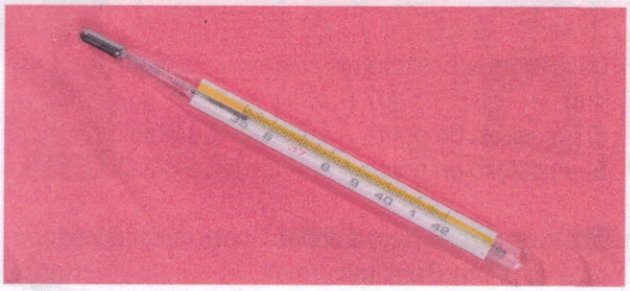
b) −200 e $\mathbb{Z}_+$ d) +20 e $\mathbb{Z}^*_-$ f) +1 000 e $\mathbb{Z}^*_+$

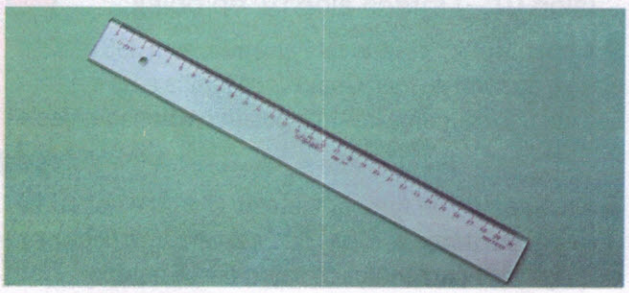
4 É correto afirmar que todo número natural é um número inteiro positivo?

A RETA NUMÉRICA INTEIRA

Um dos recursos usados pelo homem para representar os números é a *reta numérica*.

O termômetro e a régua graduada são alguns exemplos da utilização de uma reta numérica.

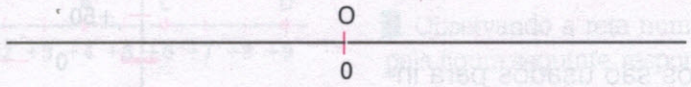




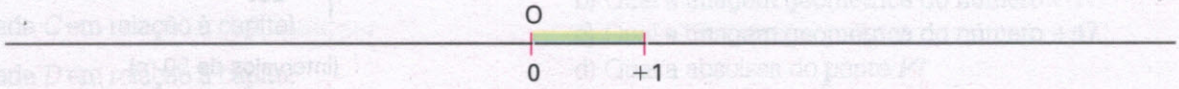
Fotos: Sérgio Dotta Jr/The Next

Vejamos como construir a reta numérica:

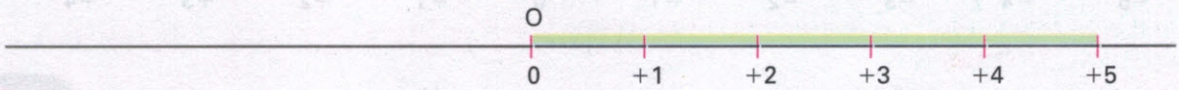
1º **passo**: Desenhamos uma reta *r* e escolhemos um ponto *O* qualquer da reta, ao qual associamos o número 0.



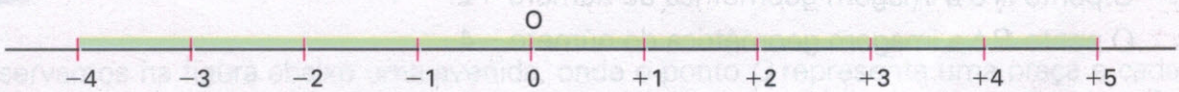
2º **passo**: A seguir, escolhemos um outro ponto da reta, à direita do ponto *O*, e a esse ponto associamos o número 1. Determinamos, assim, uma unidade de comprimento de 0 a 1.



3º **passo**: Partindo do 0, colocamos essa unidade de comprimento repetidas vezes, da esquerda para a direita, ao longo da reta, determinando, assim, a localização dos pontos associados aos números positivos +2, +3, +4, +5, ...



4º **passo**: Usando a mesma unidade de comprimento, medimos distâncias à esquerda do zero e localizamos o número −1 como o oposto de +1, o número −2 como o oposto de +2 e assim por diante.

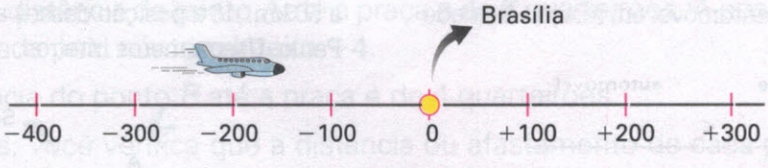


A reta numérica assim obtida é denominada *reta numérica inteira.*

A reta numérica não precisa, necessariamente, ser colocada na posição horizontal. Se pensarmos no termômetro e nos botões indicativos dos andares de um elevador, parece natural usar a reta numérica na posição vertical.

Vejamos algumas aplicações práticas da reta numérica inteira.

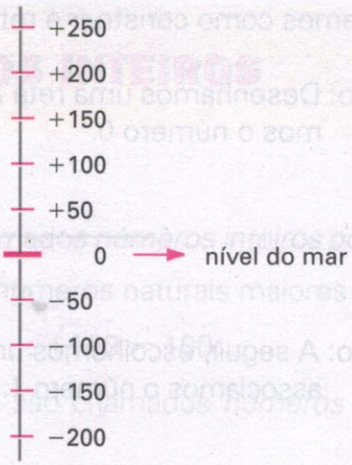
1. A reta numérica abaixo indica a posição de um avião em relação à cidade de Brasília, voando na rota leste-oeste. Os números positivos são usados para indicar distâncias a leste de Brasília; os números negativos, para designar distâncias a oeste de Brasília.



(intervalos de 100 km)

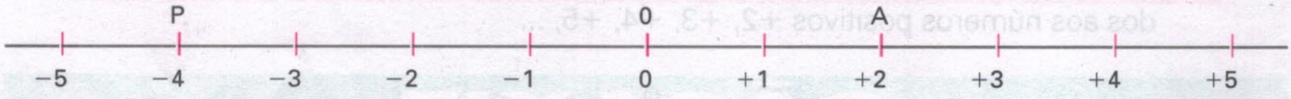
2. A reta numérica ao lado pode indicar a altitude e a profundidade em relação ao nível do mar.

Os números positivos são usados para indicar as altitudes; os números negativos, para indicar as profundidades.



(intervalos de 50 m)

Observe, agora, a reta numérica a seguir, onde estão destacados os pontos *A* e *P*:



Numa reta numérica:

✓ cada ponto é chamado *imagem geométrica* do número inteiro.

Assim:

O ponto *A* é a imagem geométrica do número +2.

O ponto *P* é a imagem geométrica do número −4.

✓ cada número inteiro é chamado *abscissa* do ponto correspondente.

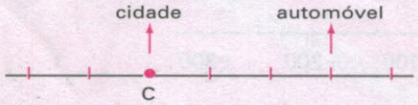
Assim:

O número +2 é a abscissa do ponto *A*.

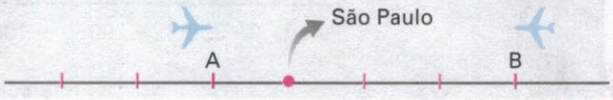
O número −4 é a abscissa do ponto *P*.

FIXAÇÃO

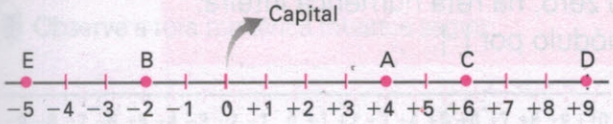
1 A figura abaixo é uma reta numérica onde foram usados intervalos de 20 km. Ela indica a posição de um automóvel em relação à cidade *C*. Usando números inteiros, dê a posição do automóvel em relação à cidade.



2 A figura seguinte é de uma reta numérica mostrando a posição de dois aviões, *A* e *B*, em relação à cidade de São Paulo. Sabendo que cada intervalo corresponde a 50 km, dê a posição desses aviões em relação a São Paulo. Use números inteiros.



3 Suponha que a figura seguinte represente uma rodovia ligando várias cidades de um mesmo estado e que cada intervalo seja uma unidade para medir distâncias.



Usando números inteiros dê a posição:

a) da cidade *A* em relação à capital

b) da cidade *B* em relação à capital

c) da cidade *C* em relação à capital

d) da cidade *D* em relação à capital

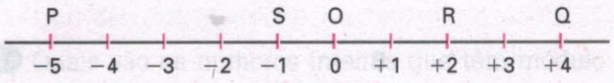
e) da cidade *E* em relação à capital

4 De acordo com o exercício anterior, se cada intervalo corresponde a 100 km, dê a posição das cidades *B* e *C* em relação à capital.

5 Ainda de acordo com o exercício 3, e fazendo cada intervalo corresponder a 100 km, determine a distância entre as cidades:

a) *A* e *C*
b) *A* e *D*
c) *B* e *A*
d) *E* e *B*
e) *B* e *D*
f) *E* e *A*

6 Observando a reta numérica inteira representada pela figura seguinte, responda:



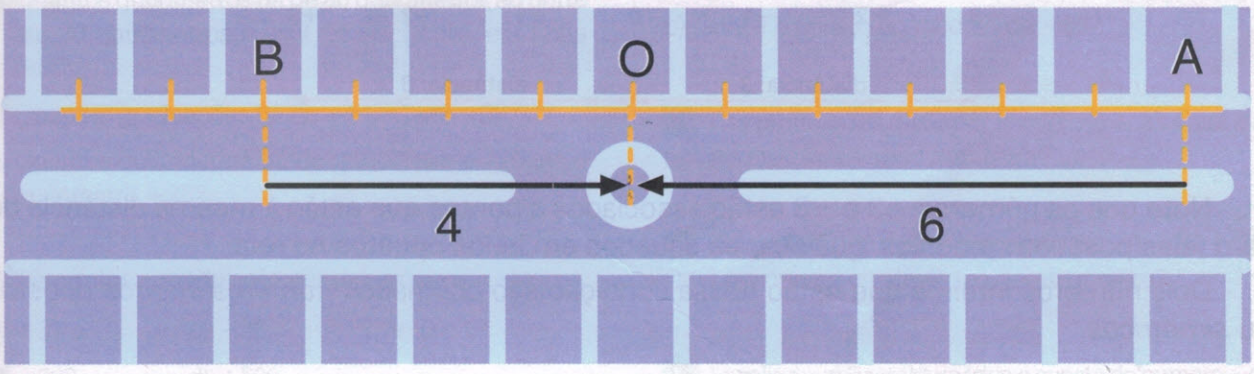
a) Qual é a abscissa do ponto *R*?
b) Qual a imagem geométrica do número −1?
c) Qual a imagem geométrica do número +4?
d) Qual a abscissa do ponto *P*?

7 Usando intervalos de 1 cm, faça o desenho de uma reta numérica inteira e localize os pontos:

a) *A*, de abscissa +3
b) *R*, de abscissa −2
c) *B*, de abscissa −6
d) *S*, de abscissa +7
e) *C*, de abscissa +4
f) *P*, de abscissa −1

MÓDULO DE UM NÚMERO INTEIRO

Observamos na figura abaixo uma avenida, onde o ponto *O* representa uma praça e cada intervalo representa um quarteirão.



Observamos que a posição do ponto *A* em relação à praça é dada pelo número inteiro +6.

Dizemos que a distância do ponto *A* até a praça é de 6 quarteirões. A posição do ponto *B* em relação à praça é dada pelo número inteiro −4.

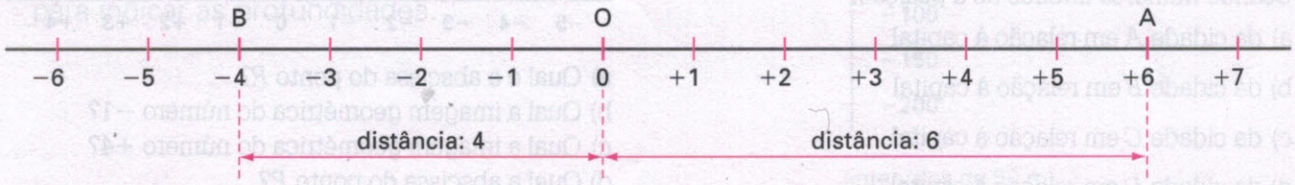
Então, a distância do ponto *B* até a praça é de 4 quarteirões.

Nos dois casos, você verifica que a distância ou afastamento de cada ponto em relação à praça (ponto de origem) é sempre um número natural: o número 6 e o número 4.

Essa distância ou afastamento denomina-se módulo do número inteiro associado ao ponto.

> Chama-se *módulo* de um número inteiro a distância ou afastamento desse número até o zero, na reta numérica inteira. Representa-se o módulo por | |.

Assim:



O módulo de 0 é 0 e indica-se $|0| = 0$.

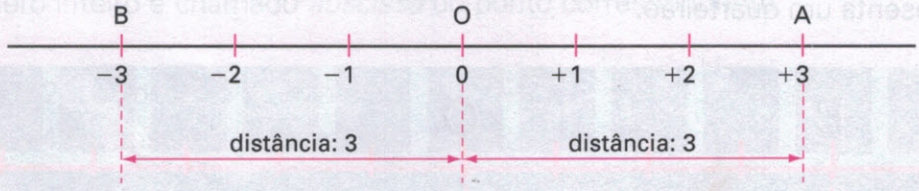
O módulo de +6 é 6 e indica-se $|+6| = 6$.

O módulo de −4 é 4 e indica-se $|-4| = 4$.

O módulo de qualquer número inteiro, diferente de zero, é sempre positivo.

Números inteiros opostos ou simétricos

Observe a seguinte reta numérica inteira:



Note que os números +3 e −3 estão associados a pontos que estão à mesma distância do zero (eles possuem módulos iguais), mas situados em lados opostos na reta.

Dois números inteiros que estão nessa condição são chamados *números inteiros opostos* ou *simétricos*.

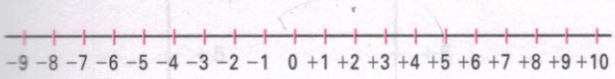
Exemplos:

1. +3 e −3 são números opostos ou simétricos;
   +3 é o oposto ou simétrico de −3 e vice-versa.

2. +100 e −100 são números opostos ou simétricos;
   +100 é o oposto ou simétrico de −100 e vice-versa.

FIXAÇÃO

1 Observe a reta numérica inteira a seguir:



Dê a distância de:

a) +5 a 0
b) −8 a 0
c) −3 a 0
d) +7 a 0
e) −2 a +5
f) −9 a −1
g) +2 a +7
h) −4 a +4

2 Imagine uma reta numérica e dê a distância de:

a) −27 a 0
b) +33 a 0
c) −61 a 0
d) −12 a +25
e) −49 a −10
f) −8 a +30
g) −100 a −45
h) −10 a +50

3 Imagine uma reta numérica e responda:

a) Quantos quilômetros há de 90 quilômetros a oeste até 50 quilômetros a leste de um ponto, em linha reta?

b) Quantas graduações há de 3 graus centígrados abaixo de zero até 12 graus centígrados acima de zero?

c) Quantos quilômetros há de 80 quilômetros ao norte até 30 quilômetros ao sul de um ponto, em linha reta?

d) Quantas graduações há de −51 °C até −27 °C?

e) Quantos quilômetros há do quilômetro −120 até o quilômetro +25?

4 Determine o módulo do número inteiro:

a) +31
b) −300
c) −28
d) +500
e) 0

5 Dois números inteiros diferentes têm o mesmo módulo: 20. Quais são esses números?

6 Escreva como você lê cada uma das sentenças:

a) $|+11| = 11$
b) $|-30| = 30$

7 Usando os símbolos =, > ou <, compare:

a) $|-7|$ e $|+3|$
b) $|-35|$ e $|+60|$
c) $|-13|$ e $|+10|$
d) $|-50|$ e $|+50|$

8 Quais são os números inteiros que têm módulo menor que −3?

9 São dados os números inteiros −13, +20, +27, −25, −32, +51 e −40. Dentre esses números, identifique os que têm módulo:

a) menor que 30
b) entre 30 e 50
c) acima de 50

10 Há algum número inteiro que tem módulo menor que zero?

11 Dois números possuem o mesmo módulo mas, na reta numérica, estão situados em lados opostos em relação à origem. Como são chamados esses números?

12 Responda:

a) Qual é o número oposto ou simétrico de −26?
b) Qual é o oposto do módulo de −65?

13 Um número x é dado por $x = 2^3 : 2 + 2^4$. Qual é o oposto ou simétrico do número x?

14 Um número inteiro é expresso por $81 : 3^4 + 3^0$. Qual é o oposto ou simétrico desse número?

15 Localize numa reta numérica o oposto do número −4.

16 O número x é o simétrico ou o oposto do número +250. Qual é o número x?

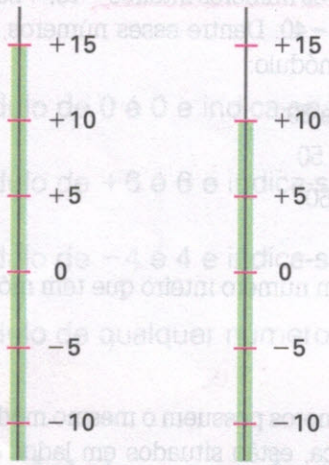
17 Calcule o valor da expressão $|-17| + |+33| - |-50|$.

COMPARAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Vamos considerar as seguintes afirmações:

- Uma temperatura de 15 graus acima de zero é maior que uma temperatura de 10 graus acima de zero.

Essa afirmação significa comparar os números inteiros +15 e +10:

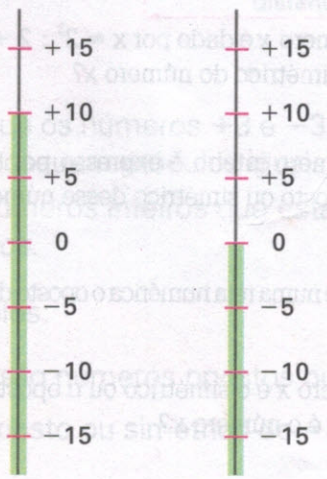


$$+15 > +10$$

Entre dois números inteiros positivos, o maior é aquele que está a uma maior distância do zero, ou seja, o maior é aquele que tem maior módulo.

- Uma temperatura de 10 graus acima de zero é maior que uma temperatura de 0 grau.

Essa afirmação significa comparar os números inteiros +10 e 0:

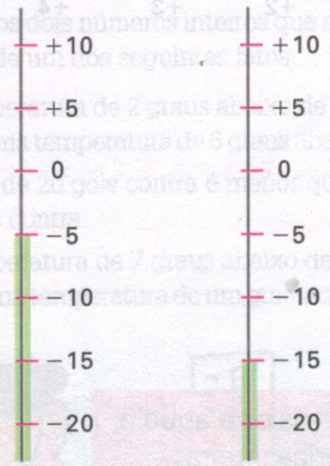


$$+10 > 0$$

Qualquer número inteiro positivo é maior que zero.

❖ Uma temperatura de 5 graus abaixo de zero é maior que uma temperatura de 15 graus abaixo de zero.

Essa afirmação significa comparar os números inteiros −5 e −15:

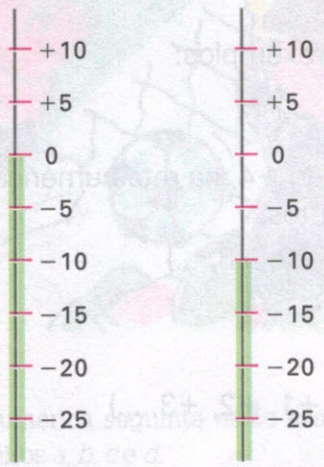


$$-5 > -15$$

Entre dois números inteiros negativos, o maior é aquele que está a uma menor distância do zero, ou seja, o maior é aquele que tem menor módulo.

❖ Uma temperatura de 0 grau é maior que uma temperatura de 10 graus abaixo de zero.

Essa afirmação significa comparar os números inteiros 0 e −10:

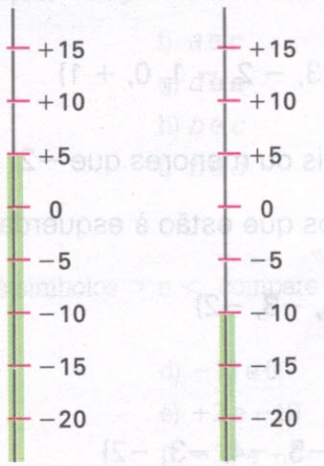


$$0 > -10 \text{ ou } -10 < 0$$

Qualquer número inteiro negativo é menor que zero.

❖ Uma temperatura de 5 graus acima de zero é maior que uma temperatura de 10 graus abaixo de zero.

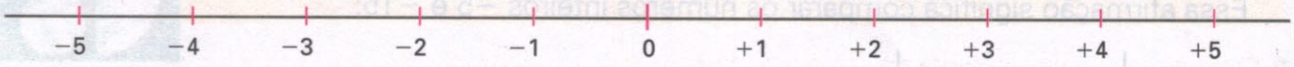
Essa afirmação significa comparar os números inteiros +5 e −10:



$$+5 > -10$$

Qualquer número inteiro positivo é maior que qualquer número inteiro negativo.

Pelo que vimos nas cinco afirmações apresentadas, podemos generalizar, utilizando a reta numérica:



$+5 > +2$ e +5 está à direita de +2

$+4 > 0$ e +4 está à direita de 0

$-1 > -4$ e −1 está à direita de −4

$0 > -3$ e 0 está à direita de −3

$+2 > -4$ e +2 está à direita de −4

Entre dois números inteiros quaisquer, o maior é aquele que está mais à direita na reta numérica inteira.

Escrevendo subconjuntos de $\mathbb{Z}$

Vamos escrever alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$. Vejamos os exemplos:

1. Escrever o conjunto *A* dos números inteiros maiores que −4.

Todos os elementos do conjunto *A* devem estar à direita do −4, na reta numérica inteira. Podemos escrever o conjunto *A* de duas maneiras diferentes.

Pela nomeação dos elementos: $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$

Simbolicamente: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -4\}$

Então:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -4\} = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$$

2. Escrever o conjunto *B* dos números inteiros situados entre −6 e +2.

Pela nomeação dos elementos: $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1\}$

Simbolicamente: $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 < x < +2\}$

Então:

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 < x < +2\} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1\}$$

3. Escrever o conjunto *C* dos números inteiros que são iguais ou menores que −2.

Nesse caso, devemos escrever o −2 e todos os números que estão à esquerda do −2, na reta numérica.

Pela nomeação dos elementos: $C = \{..., -7, -6, -5, -4, -3, -2\}$

Simbolicamente: $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant -2\}$

Então:

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant -2\} = \{..., -7, -6, -5, -4, -3, -2\}$$

FIXAÇÃO

1 Compare os dois números inteiros que estão envolvidos em cada um dos seguintes fatos:

a) Uma temperatura de 2 graus abaixo de zero é mais alta que uma temperatura de 6 graus abaixo de zero.

b) Um saldo de 20 gols contra é menor que um saldo de 10 gols contra.

c) Uma temperatura de 7 graus abaixo de zero é menor que uma temperatura de um grau acima de zero.

2 Na reta numérica seguinte estão assinalados os números inteiros a, b, c e d.

Nessas condições, compare os números:

a) a e 0
b) b e 0
c) c e 0
d) 0 e d
e) a e b
f) a e c
g) d e a
h) b e c
i) b e d

3 Usando os símbolos $>$ e $<$, compare os números inteiros:

a) 0 e +7
b) +11 e 0
c) 0 e −9
d) −13 e 0
e) +2 e −19
f) −30 e +6
g) +7 e +20
h) −11 e −30
i) −1 e +5
j) −20 e −3

4 Escreva:

a) o antecessor de −9
b) o sucessor de −20
c) o antecessor de 0
d) o sucessor de 0
e) o antecessor de +11
f) o sucessor de +29

5 Uma equipe A tem saldo negativo de gols, enquanto uma equipe B tem saldo nulo. Qual delas tem maior saldo?

6 Escreva:

a) na ordem crescente os seguintes números inteiros: −70, +20, 0, −10, +80, −100

b) na ordem decrescente os seguintes números inteiros: +1, −160, −500, +7, −100, +12, −300

7 Duas equipes da 1ª divisão terminaram um torneio de futebol empatadas em último lugar. Uma delas deverá ser rebaixada para a 2ª divisão, enquanto a outra permanecerá na divisão onde está. O regulamento manda que a decisão seja pelo saldo de cada equipe, permanecendo então a equipe que tiver melhor saldo. Se a equipe A tem −13 de saldo e a equipe B tem −9 de saldo, qual delas deverá ser rebaixada?

8 Em um torneio, as equipes *A* e *B* terminaram empatadas na classificação. De acordo com o regulamento, deve prosseguir na fase seguinte do torneio a equipe que tiver melhor saldo de gols. A equipe *A* marcou 10 gols e sofreu 17, enquanto a equipe *B* marcou 15 gols e sofreu 20. Nessas condições, responda:

a) Qual o saldo da equipe *A*?

b) Qual o saldo da equipe *B*?

c) Qual das duas equipes passou para a fase seguinte do torneio?

d) Compare os números inteiros que expressam os saldos das duas equipes.

9 Dentre os números inteiros -20, $+6$, -1, -7, $+2$, -4 e 0, quais deles podem ser colocados no lugar do x para que se tenha:

a) $x > -5$? b) $x \leq 0$?

10 Usando a forma simbólica e a nomeação dos elementos, escreva:

a) o conjunto *A* dos números inteiros maiores que -20

b) o conjunto *B* dos números inteiros menores que -7

c) o conjunto *C* dos números inteiros maiores ou iguais a -5 e menores que $+3$

11 Nomeando os elementos, escreva os seguintes conjuntos:

a) $P = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -3\}$

b) $Q = \{x \in \mathbb{Z} \mid -9 < x \leq -6\}$

c) $R = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -100\}$

12 Nomeando os elementos, escreva o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 < x < +3\}$. A seguir, responda:

a) Quantos números inteiros não negativos há nesse conjunto?

b) Quantos números inteiros positivos há nesse conjunto?

c) Quais elementos do conjunto $\mathbb{Z}^*$ pertencem ao conjunto *A*?

13 O conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -1 < x < +1\}$ é vazio ou unitário?

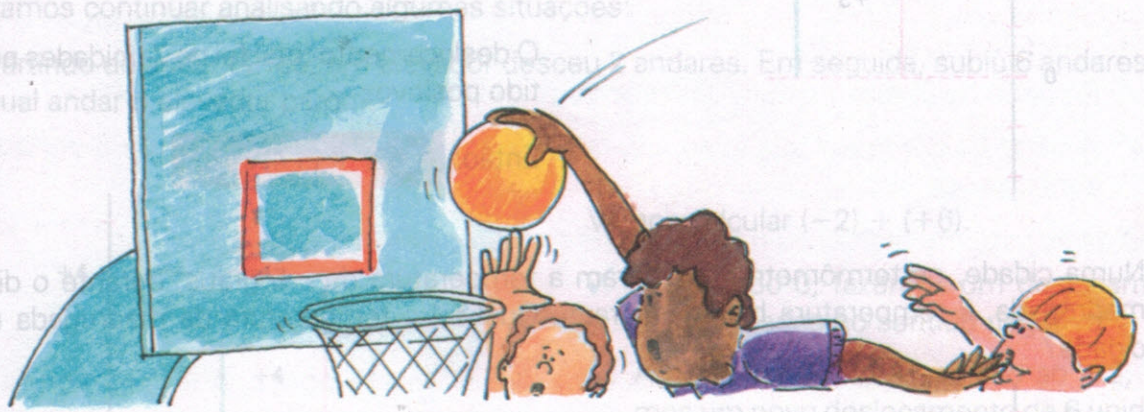
14 É correto dizer que o conjunto $B = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid -2 < x < 0\}$ é unitário?

15 Sendo $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 < x < +2\}$, quantos elementos tem o conjunto $A \cap B$?

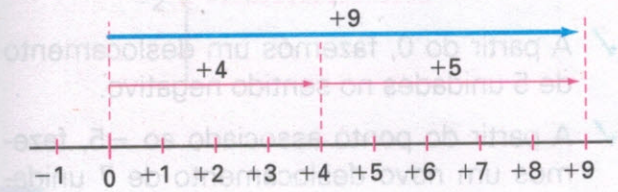
10 ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Vamos analisar as seguintes situações:

1ª Disputando um torneio quadrangular de basquete, uma equipe obteve 4 pontos no primeiro turno e 5 pontos no segundo turno. Quantos pontos a equipe obteve nesse quadrangular?



Nessa situação, devemos calcular (+4) + (+5), o que é fácil de ser feito mentalmente. Vamos representar esse fato usando a reta numérica inteira.



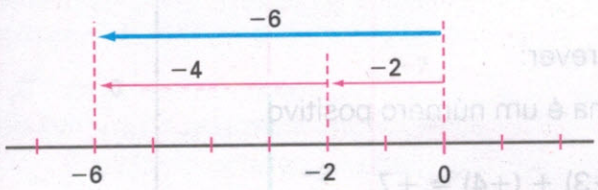
- ✓ A partir do 0, fazemos um deslocamento de 4 unidades no sentido positivo.
- ✓ A partir do ponto associado ao +4, fazemos um novo deslocamento de 5 unidades no sentido positivo.

O deslocamento total foi de 9 unidades no sentido positivo.

Então: $(+4) + (+5) = +9$

2ª Em um torneio de futebol, uma equipe perdeu 2 pontos no primeiro turno e perdeu 4 pontos no segundo turno. Quantos pontos a equipe perdeu nesse torneio?

Devemos calcular (−2) + (−4).

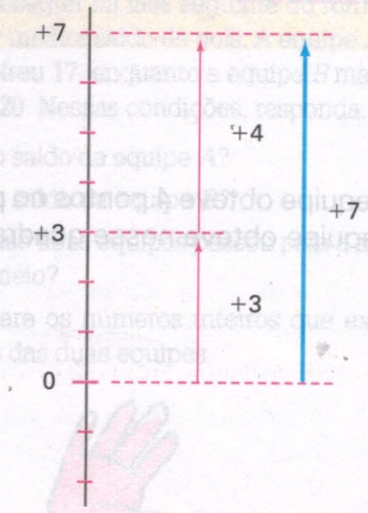


- ✓ A partir do 0, fazemos um deslocamento de 2 unidades no sentido negativo.
- ✓ A partir do ponto associado ao −2, fazemos um novo deslocamento de 4 unidades no sentido negativo.

O deslocamento total foi de 6 unidades no sentido negativo.

Então: $(-2) + (-4) = -6$

3ª Um elevador, partindo do térreo, subiu, inicialmente, 3 andares e, em seguida, 4 andares. Em qual andar o elevador parou?



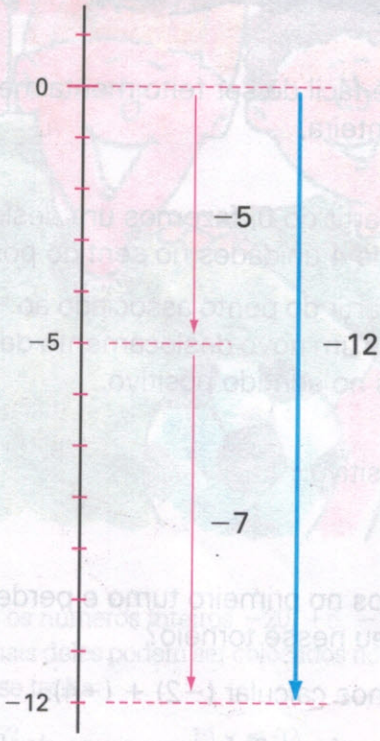
Devemos calcular (+3) + (+4).

- ✓ A partir do 0, fazemos um deslocamento de 3 unidades no sentido positivo.
- ✓ A partir do ponto associado ao +3, fazemos um novo deslocamento de 4 unidades no sentido positivo.

O deslocamento total foi de 7 unidades no sentido positivo.

Então: (+3) + (+4) = +7

4ª Numa cidade, os termômetros marcaram a temperatura de −5 graus, durante o dia. De madrugada, a temperatura baixou 7 graus. Qual foi a temperatura da madrugada nessa cidade?



Devemos calcular (−5) + (−7).

- ✓ A partir do 0, fazemos um deslocamento de 5 unidades no sentido negativo.
- ✓ A partir do ponto associado ao −5, fazemos um novo deslocamento de 7 unidades no sentido negativo.

O deslocamento total foi de 12 unidades no sentido negativo.

Então: (−5) + (−7) = −12

Pelas situações apresentadas, podemos escrever:

- ❖ Quando os dois números são positivos, a soma é um número positivo.
  Vejamos:
  a) (+4) + (+5) = +9 b) (+3) + (+4) = +7
- ❖ Quando os dois números são negativos, a soma é um número negativo.
  Vejamos:
  a) (−2) + (−4) = −6 b) (−5) + (−7) = −12

❖ O módulo do resultado é igual à *soma* dos módulos das parcelas.

Observe estes exemplos:

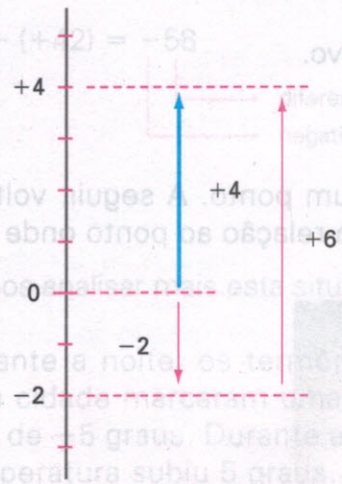
$(+15) + (+21) = +36$ $\qquad$ $(-42) + (-37) = -79$

soma dos módulos

sinal comum às parcelas

Vamos continuar analisando algumas situações:

5ª Partindo do andar térreo, um elevador desceu 2 andares. Em seguida, subiu 6 andares. Em qual andar o elevador parou?



Vamos calcular $(-2) + (+6)$.

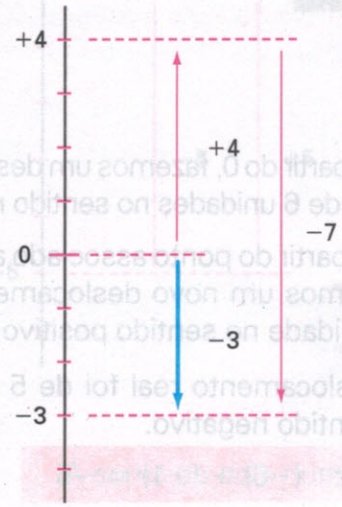
✓ A partir do 0, fazemos um deslocamento de 2 unidades no sentido negativo.

✓ A partir do ponto associado ao -2, fazemos um novo deslocamento de 6 unidades no sentido positivo.

O deslocamento real é de 4 unidades no sentido positivo.

Então: $(-2) + (+6) = +4$

6ª Em uma cidade, a temperatura durante o período da tarde foi de $+4$ graus. Durante a noite, a temperatura baixou 7 graus. Qual foi a temperatura dessa cidade, durante a noite?



Vamos calcular $(+4) + (-7)$.

✓ Partindo do 0, fazemos um deslocamento de 4 unidades no sentido positivo.

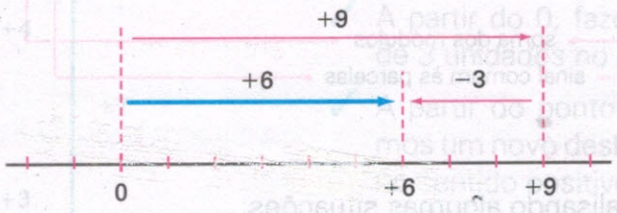
✓ A partir do ponto associado ao $+4$, fazemos um novo deslocamento de 7 unidades no sentido negativo.

O deslocamento real foi de 3 unidades no sentido negativo.

Então: $(+4) + (-7) = -3$

7ª Durante um torneio de futebol, uma equipe marcou 9 gols e sofreu 3. Qual foi o saldo de gols dessa equipe no campeonato?

Devemos calcular (+9) + (−3).



- ✓ Partindo do 0, fazemos um deslocamento de 9 unidades no sentido positivo.
- ✓ A partir do ponto associado ao +9, fazemos um novo deslocamento de 3 unidades no sentido negativo.

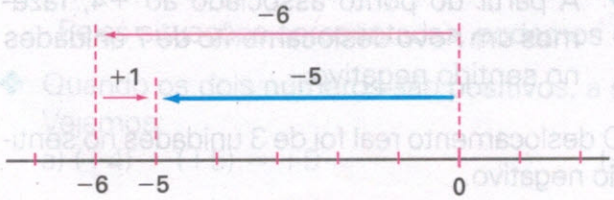
O deslocamento real foi de 6 unidades no sentido positivo.

Então: (+9) + (−3) = +6

8ª Uma pessoa andou, inicialmente, 6 km a oeste de um ponto. A seguir, voltou 1 km para leste, onde parou. Qual a posição da pessoa em relação ao ponto onde iniciou a caminhada?

Rosa-dos-ventos

Devemos calcular (−6) + (+1).



- ✓ A partir do 0, fazemos um deslocamento de 6 unidades no sentido negativo.
- ✓ A partir do ponto associado ao −6, fazemos um novo deslocamento de 1 unidade no sentido positivo.

O deslocamento real foi de 5 unidades no sentido negativo.

Então: (−6) + (+1) = −5

Da 5ª à 8ª situações apresentadas, podemos escrever:

- Quando dois números têm sinais diferentes, o sinal do resultado corresponde ao sinal do número que está mais distante da origem.
- O módulo do resultado é igual à *diferença* entre os módulos das parcelas.

Observe estes exemplos:

$(-16) + (+20) = +4$

→ diferença entre os módulos dos números

→ positivo, pois +20 está mais distante do 0 do que −16

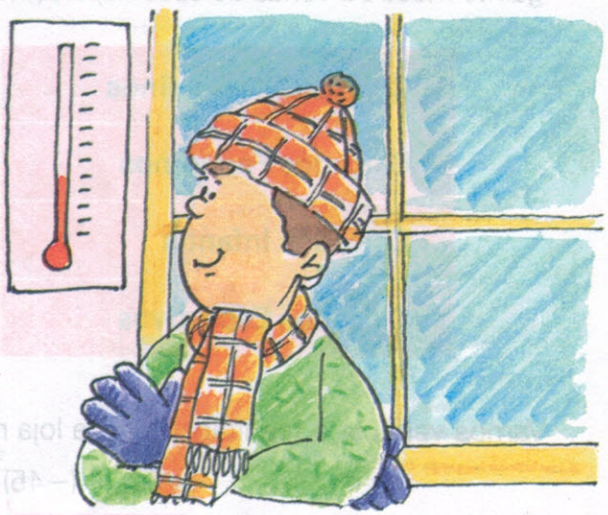
$(-100) + (+42) = -58$

→ diferença entre os módulos dos números

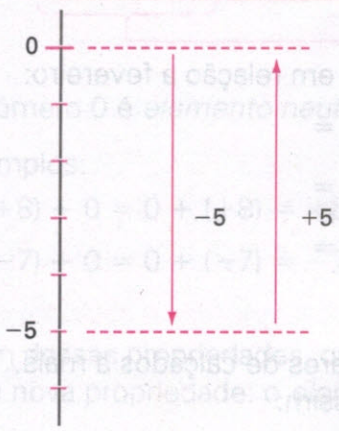
→ negativo, pois −100 está mais distante do 0 do que +42

Vamos analisar mais esta situação:

9ª Durante a noite, os termômetros de uma cidade marcaram uma temperatura de −5 graus. Durante a manhã, a temperatura subiu 5 graus. Que temperatura os termômetros marcaram durante a manhã?



Devemos calcular $(-5) + (+5)$.



Pelo esquema, você observa que o deslocamento real foi 0, pois partimos do 0 e voltamos para o mesmo 0.

Então: $(-5) + (+5) = 0$

A soma de dois números inteiros opostos ou simétricos é igual a 0.

Adição de três ou mais números inteiros

Consideremos as seguintes situações:

1ª Ivo tinha +R$ 300,00 de saldo bancário. Se durante o dia ele deu um cheque de R$ 480,00 e fez um depósito de R$ 210,00, qual foi o seu saldo no final do dia?

Para resolver essa situação, devemos calcular (+300) + (−480) + (+210).

Veja como fazemos esse cálculo:

$$\underbrace{(+300) + (-480) + (+210)} = \underbrace{(-180) + (+210)} = +30$$

Podemos, também, chegar a esse resultado da seguinte maneira:

- ✓ Somando o saldo existente, que é positivo, com o depósito feito: (+300) + (+210) = (+510)
- ✓ Considerando o débito existente: (−480)
- ✓ Somando os dois resultados: (+510) + (−480) = +30

2ª Uma loja de calçados tem quatro departamentos: um de calçados masculinos, um de calçados femininos, um terceiro de calçados infantis e um quarto de calçados esportivos. O quadro seguinte mostra a venda de cada departamento no mês de março, em relação ao mês anterior:

Calçados Masculinos	60 pares a mais	⟶	(+60)
Calçados Femininos	45 pares a menos	⟶	(−45)
Calçados Infantis	18 pares a menos	⟶	(−18)
Calçados Esportivos	30 pares a mais	⟶	(+30)

Vamos verificar o resultado final da loja no mês de março, em relação a fevereiro:

$$\underbrace{(+60) + (-45)} + (-18) + (+30) =$$
$$+15 + (-18) + (+30) =$$
$$\underbrace{(-3) + (+30)} =$$
$$+27$$

Em relação a fevereiro, essa loja vendeu, em março, 27 pares de calçados a mais.
Podemos chegar a esse mesmo resultado, procedendo assim:

- ✓ Somando as quantidades positivas: (+60) + (+30) = (+90)
- ✓ Somando as quantidades negativas: (−45) + (−18) = (−63)
- ✓ Somando os resultados obtidos: (+90) + (−63) = +27

Observe, agora, como calculamos: $(-9) + (+11) + (+13) + (-20) + (-2)$ usando dois modos diferentes.

1º modo:

$(-9) + (+11) + (+13) + (-20) + (-2) =$

$= (+2) + (+13) + (-20) + (-2) =$

$= (+15) + (-20) + (-2) =$

$= (-5) + (-2) = -7$

2º modo:

$(-9) + (+11) + (+13) + (-20) + (-2) =$

$= (+11) + (+13) + (-9) + (-20) + (-2) =$

$= (+24) + (-31) =$

$= -7$

Propriedades da adição

- A adição de dois números inteiros é sempre possível (*fechamento*).

  Exemplos:

  1. $(+3) + (+5) = +8 \in \mathbb{Z}$
  2. $(-7) + (-3) = -10 \in \mathbb{Z}$
  3. $(+11) + (-8) = +3 \in \mathbb{Z}$
  4. $(+7) + (-13) = -6 \in \mathbb{Z}$

- A adição de dois números inteiros é *comutativa*.

  Exemplo:

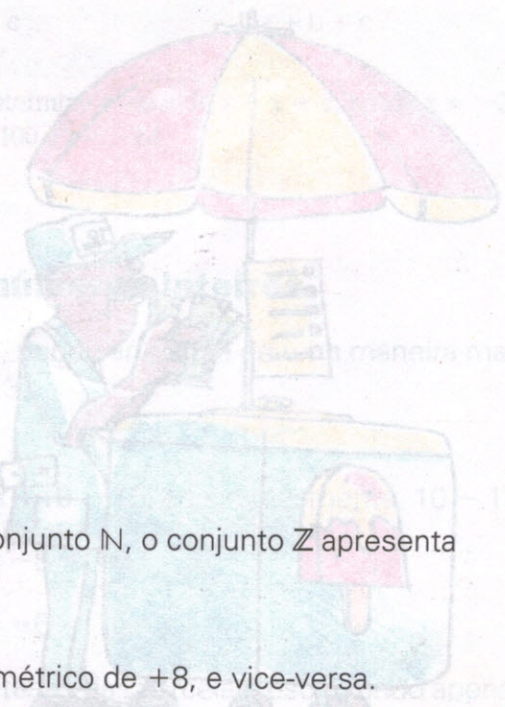
  $(+11) + (-9) = +2$
  $(-9) + (+11) = +2$
  $\Big\}$ $(+11)+(-9) = (-9)+(+11)$

- A adição de dois números inteiros é *associativa*.

  Exemplo:

  $(-8) + (-2) + (+7) = (-10) + (+7) = -3$

  $(-8) + (-2) + (+7) = (-8) + (+5) = -3$



- O número 0 é *elemento neutro* da adição em $\mathbb{Z}$.

  Exemplos:

  1. $(+8) + 0 = 0 + (+8) = +8$
  2. $(-7) + 0 = 0 + (-7) = -7$

- Além dessas propriedades, que são válidas para o conjunto $\mathbb{N}$, o conjunto $\mathbb{Z}$ apresenta uma nova propriedade: o *elemento oposto*.

  Exemplos:

  1. $(-8) + (+8) = 0$ e -8 é o elemento oposto ou simétrico de $+8$, e vice-versa.
  2. $(+13) + (-13) = 0$ e $+13$ é o elemento oposto ou simétrico de -13, e vice-versa.

FIXAÇÃO

1 Vamos calcular:

a) (+11) + 0
b) 0 + (−13)
c) (+28) + (+2)
d) (−34) + (−3)
e) (−8) + (−51)
f) (+21) + (+21)
g) (−22) + (+34)
h) (+49) + (−60)
i) (−130) + (−125)
j) (+49) + (+121)
l) (+820) + (−510)
m)(−162) + (−275)

2 Na disputa de um torneio de futebol, uma equipe ganhou 13 pontos no primeiro turno e 18 no segundo. Usando a adição de números inteiros, determine quantos pontos essa equipe ganhou?

3 Partindo do térreo, um elevador desce 2 andares. Em seguida, desce mais 1 andar. Usando a adição de números inteiros, dê o andar em que o elevador parou.

4 Caio tem R$ 3 600,00 na sua conta bancária. Se ele fizer uma retirada de R$ 4 000,00, como ficará o seu saldo?

5 Um vendedor de sorvetes teve, no sábado, um prejuízo de 12 reais. No domingo, porém, teve um lucro de 29 reais. Esse fim de semana deu lucro ou prejuízo ao vendedor de sorvetes? De quanto?

6 Em um certo local da Terra, os termômetros marcaram −3 graus durante o dia. À noite, a temperatura caiu 8 graus. Qual foi a temperatura assinalada pelos termômetros durante a noite?

7 Numa escola, os alunos têm 1 ponto positivo por lição que fazem e 1 ponto negativo por lição que deixam de fazer. No mês passado, um dos alunos dessa escola fez 12 lições e deixou de fazer 8. Qual foi o saldo desse aluno no mês passado?

8 Sabe-se que Júlio César, famoso conquistador e cônsul romano, nasceu no ano 100 a.C. e morreu, assassinado, com a idade de 56 anos. Em que ano Júlio César morreu?

9 Se uma firma teve 15 milhões de reais de lucro no primeiro semestre e 19 milhões de reais de prejuízo no segundo semestre, essa firma teve lucro ou prejuízo durante o ano? De quanto?

10 Na atmosfera, a temperatura diminui cerca de 1 grau a cada 200 m de afastamento da superfície terrestre. Se a temperatura na superfície é de +20 graus, qual será a temperatura na atmosfera a uma altura de 10 km?

11 Na primeira fase de um torneio de futebol, duas equipes terminaram empatadas na classificação geral. Apenas uma delas continuará disputando o torneio e, de acordo com o regulamento, o desempate é feito pelo maior saldo de gols. A equipe *A* marcou 18 gols e sofreu 21, enquanto a equipe *B* marcou 24 gols e sofreu 25. Nessas condições:

a) Qual é o saldo de gols da equipe *A*?
b) Qual é o saldo de gols da equipe *B*?
c) Qual das duas equipes prosseguiu disputando o torneio?

12 Em um programa de perguntas e respostas, a cada resposta correta que Carlos deu, recebeu R$ 20,00 do apresentador do programa. Porém, para cada resposta errada, pagou R$ 22,00. De 100 perguntas, Carlos respondeu corretamente a 52. Ele teve lucro ou prejuízo? De quantos reais?

13 Determine o número inteiro que se deve colocar no lugar de x para que sejam verdadeiras as igualdades:

a) $x + (+9) = +13$
b) $x + (-6) = -10$
c) $x + (-7) = 0$
d) $x + (-3) = +3$
e) $x + (-9) = -15$
f) $(+8) + x = +11$
g) $x + (+7) = -3$
h) $(-20) + x = -18$
i) $(+6) + x = 0$
j) $(-1) + x = -10$

14 O saldo bancário de Sérgio, no dia 1º/6/97, era de R$ 7 200,00. No período de 1/6 a 5/6, o seu extrato mostrava o seguinte movimento:

Data	Movimento	Valor
2/6	depósito	R$ 10 000,00
3/6	débito	R$ 13 000,00
4/6	débito	R$ 8 000,00
5/6	depósito	R$ 5 000,00

Usando a adição de números inteiros, dê o saldo bancário de Sérgio no dia 5/6/94.

15 Vamos calcular:

a) $(+27) + (+13) + (-28)$
b) $(-50) + (-30) + (-12)$
c) $(+90) + (-75) + (-47)$
d) $(-11) + (+20) + (+35) + (-27)$
e) $(+32) + (-68) + (-22) + (+48)$
f) $(+99) + (-100) + (-100) + (+98) + (-10)$
g) $(-73) + (-22) + (-45) + (-92) + (+250)$

16 O movimento financeiro de uma firma no primeiro semestre de um determinado ano foi o seguinte:

Janeiro	lucro de R$ 2 milhões
Fevereiro	prejuízo de R$ 1 milhão
Março	prejuízo de R$ 4 milhões
Abril	lucro de R$ 2 milhões
Maio	lucro de R$ 3 milhões
Junho	lucro de R$ 2 milhões

Usando a adição de números inteiros, verifique se a firma teve lucro ou prejuízo nesse semestre e de quanto foi esse montante.

17 Um número x é tal que
$x = (-19) + (-24) + (+20) + (+17) + (+8) + (-11)$.
Qual é esse número?

18 Os números a e b são inteiros. Se a e b são opostos, quanto dá a adição $a + b$?

19 Os números a e b são inteiros positivos. É correto afirmar que $a + b$ é um número positivo?

20 Sabe-se que $a = -73$, $b = +51$ e $c = -17$. Nessas condições, calcule o valor de:

a) $a + b$
b) $a + c$
c) $b + c$
d) $a + b + c$

21 Determine o valor de $x + y + z$, sendo $x = -36$, $y = +100$ e $z = -64$.

Notação simplificada de uma adição de números inteiros

Em Matemática, a adição $(+9) + (+3)$, por exemplo, pode ser escrita de uma maneira mais simples; $(+9) + (+3)$, tem o mesmo significado de $9 + 3$.

Veja outros exemplos:

1. A adição $(+10) + (-15)$ tem o mesmo significado que $+10 - 15$, ou simplesmente, $10 - 15$.
2. A adição $(-8) + (+10)$ tem o mesmo significado que $-8 + 10$.
3. A adição $(-6) + (-15)$ tem o mesmo significado que $-6 - 15$.

Note que eliminamos o sinal + da adição e os parênteses das parcelas, escrevendo apenas essas parcelas, uma seguida da outra, cada qual com o seu próprio sinal.

Vejamos o quadro:

Adição indicada	Notação simplificada
$(+11) + (-6)$	$+11 - 6$
$(-30) + (-8)$	$-30 - 8$
$(+17) + (-15) + (+10)$	$+17 - 15 + 10$
$(-21) + (+16) + (+9) + (-1)$	$-21 + 16 + 9 - 1$

À forma simplificada aplicamos as mesmas regras já estudadas. Exemplos:

1. $13 - 19 = +13 - 19 = -6$
2. $-21 + 32 = +11$
3. $-7 - 29 = -36$
4. $23 - 9 - 18 + 15 = 23 + 15 - 9 - 18 = +38 - 27 = +11$
5. $-18 + 35 + 62 - 47 - 31 = +35 + 62 - 18 - 47 - 31 = +97 - 96 = +1$

FIXAÇÃO

1 Escreva na forma simplificada as adições e calcule:

a) $(+20) + (-18)$
b) $(-30) + (+21)$
c) $(-81) + (-17)$
d) $(+37) + (+52)$
e) $(-15) + (+22) + (-6)$

2 Vamos calcular:

a) $7 + 17$
b) $-8 - 2$
c) $-9 + 14$
d) $-4 - 4$
e) $19 - 23$
f) $-40 - 11$
g) $31 + 14$
h) $-1 + 30$
i) $40 - 63$
j) $91 - 57$
l) $-90 + 10$
m) $-100 + 104$

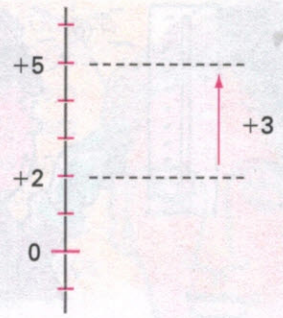
3 Calcule:

a) $7 + 20 - 4$
b) $-17 + 14 + 3$
c) $27 - 16 - 10$
d) $-25 - 21 - 40$
e) $35 + 18 + 62$
f) $-75 + 70 + 50 - 61$
g) $84 - 79 - 81 + 86$
h) $-64 - 96 - 77 + 200$
i) $-92 + 17 + 34 + 20$
j) $76 + 92 - 104 - 101 + 94$
l) $17 - 40 - 30 - 60 + 100$
m) $81 + 19 - 95 - 105 + 260 - 110$

11 SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Consideremos as seguintes situações:

1ª Se a temperatura de um local passou de +2 graus para +5 graus, qual foi a variação da temperatura nesse local?



Esse fato pode ser representado pela subtração: $(+5) - (+2) = +3$

Em um local, a temperatura, durante o dia, era de +5 graus. À noite, a temperatura baixou 2 graus. Qual a temperatura registrada à noite, nesse local?

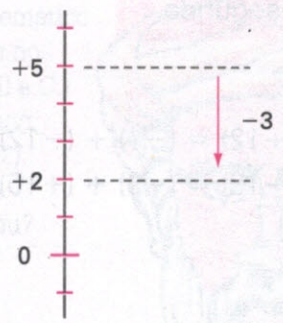
Esse fato pode ser representado pela adição:

$$(+5) + (-2) = +3$$

Se compararmos as duas igualdades, verificamos que $(+5) - (+2)$ é o mesmo que $(+5) + (-2)$. Daí podemos escrever:

$$(+5) - (+2) = (+5) + (-2) = +3$$

2ª Se a temperatura de um local passou de +5 graus para +2 graus, qual foi a variação da temperatura nesse local?

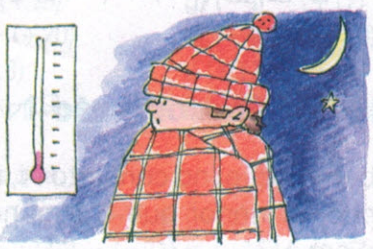


Esse fato pode ser representado pela subtração: $(+2) - (+5) = -3$

Em um local, a temperatura, durante o dia, foi de +2 graus. À noite, a temperatura baixou 5 graus. Qual a temperatura registrada à noite, nesse local?

Esse fato pode ser representado pela adição:

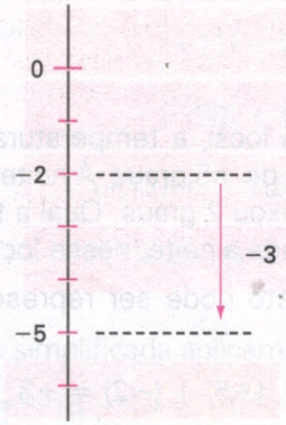
$$(+2) + (-5) = -3$$



Se compararmos as duas igualdades, verificamos que $(+2) - (+5)$ é o mesmo que $(+2) + (-5)$.

$$(+2) - (+5) = (+2) + (-5) = -3$$

3ª Se a temperatura de um local passou de −2 graus para −5 graus, qual foi a variação da temperatura nesse local?

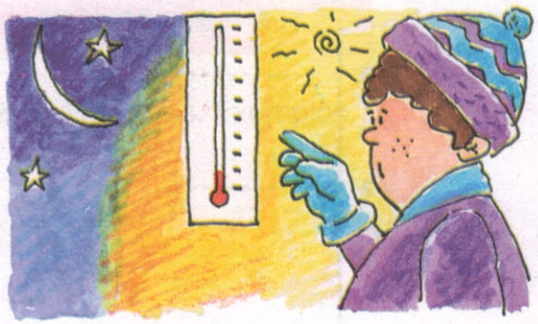


Esse fato pode ser representado pela subtração: $(-5) - (-2) = -3$

Em um local, a temperatura, durante a noite, marcava −5 graus. Durante o dia, a temperatura subiu 2 graus. Qual foi a temperatura registrada durante o dia, nesse local?

Esse fato pode ser representado pela adição:

$$(-5) + (+2) = -3$$



Se compararmos as duas igualdades, verificamos que $(-5) - (-2)$ é o mesmo que $(-5) + (+2)$.

$$(-5) - (-2) = (-5) + (+2) = -3$$

Das três situações vistas, temos:

$(+5) - (+2) = (+5) + (-2) = +3$
$(+2) - (+5) = (+2) + (-5) = -3$
$(-5) - (-2) = (-5) + (+2) = -3$

Daí, podemos afirmar:

> Subtrair dois números inteiros é o mesmo que adicionar o primeiro com o oposto do segundo.

Veja estes exemplos:

1. $(+13) - (+2) = (+13) + (-2) = +11$
2. $(+7) - (+15) = (+7) + (-15) = -8$
3. $(-1) - (+12) = (-1) + (-12) = -13$
4. $(-9) - (-15) = (-9) + (+15) = +6$

Ampliação do conjunto ℕ

Sabemos que, no conjunto ℕ, não é possível efetuar a subtração quando o primeiro número (minuendo) é menor que o segundo número (subtraendo). Assim, a subtração $3 - 10$ não é possível em ℕ.

No conjunto ℤ é sempre possível efetuar a subtração, pois a diferença entre dois números inteiros é sempre um número inteiro.

Assim, temos:

$$3 - 10 = (+3) - (+10) = (+3) + (-10) = -7$$

FIXAÇÃO

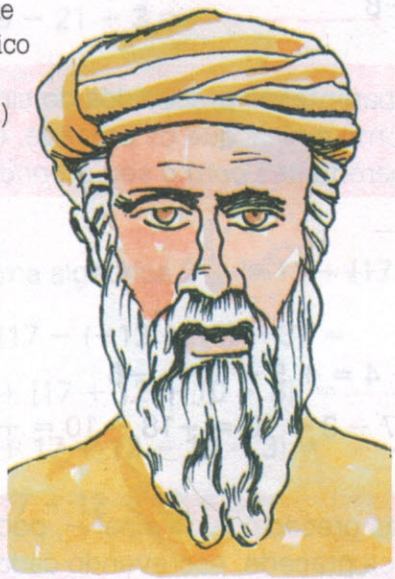
1 A maior variação de temperatura registrada em um dia foi em 1916, em Browning, Montana, nos Estados Unidos, onde a temperatura variou de 7 °C a −49 °C. Para determinar de quanto é a queda de temperatura, efetuamos uma subtração de números inteiros. Faça essa subtração. (Fonte: *Guiness Book - O livro dos recordes 1997*)

2 Alexandre, o Grande, nasceu em −356 (356 a.C.) e morreu em −323 (323 a.C.). Para saber quantos anos ele viveu, efetuamos uma subtração de números inteiros. Faça essa subtração.

Alexandre, o Grande

3 Numa cidade, a temperatura mínima foi de −1 grau, enquanto a temperatura máxima foi de +10 graus. Para determinar a variação de temperatura, efetuamos a subtração "temperatura máxima − temperatura mínima". Qual a variação da temperatura nessa cidade?

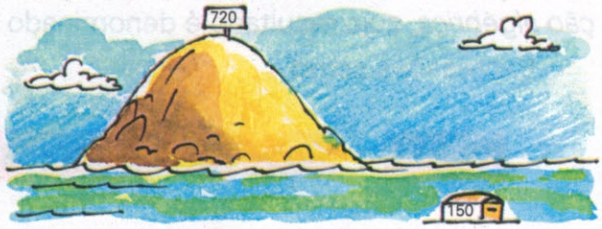
4 Pitágoras, grande filósofo e matemático grego, nasceu no ano −570 (570 a.C.) e morreu no ano −496 (496 a.C.). Quantos anos Pitágoras viveu?



Pitágoras

5 Duas duplas, *A* e *B*, jogam "buraco". Na primeira rodada, a dupla *A* fez −150 pontos, enquanto a dupla *B* fez 230 pontos. Quantos pontos a dupla *B* fez a mais que a dupla *A*?

6 Em linha reta, qual a distância entre um ponto de altitude 720 metros e um ponto de profundidade 150 metros.



7 Um termômetro marcava +6 graus pela manhã, mas à tarde a temperatura baixou para −3 graus. Qual a variação da temperatura?

8 A temperatura no interior de um *freezer* é de −9 graus. Fora, a temperatura é de +25 graus. Qual é a diferença entre as duas temperaturas?

9 Calcule:

a) 0 − (−17)
b) (−9) − (+16)
c) (+13) − (+20)
d) 0 − (+18)
e) (−1) − (−19)
f) (+20) − (+9)
g) (−4) − (+17)
h) (+40) − (+80)
i) (+11) − (−62)
j) (−72) − (−81)

10 Mostre que:

a) (−11) − (−7) ≠ (−7) − (−11)
b) [(−15) − (+9)] − (−21) ≠ (−15) − [(+9) − (−21)]

11 Vamos calcular:

a) (−7 200) − (−1 750)
b) (+8 104) − (−3 376)
c) (+6 201) − (+8 316)
d) (+4 005) − (−3 005)

12 ADIÇÃO ALGÉBRICA

Vamos considerar:

✓ a adição em $\mathbb{Z}$: $(-7) + (+4) = -3$

✓ a subtração em $\mathbb{Z}$: $(-7) - (+4) = (-7) + (-4) = -11$

Como toda subtração em $\mathbb{Z}$ pode ser transformada em adição, dizemos que a adição e a subtração de números inteiros podem ser consideradas uma única operação, denominada *adição algébrica*, cujo resultado é denominado *soma algébrica*.

Expressões como

$8 - 10$, $-1 - 11$, $2 + 7 - 6$, $-13 + 2 + 6$ e $-8 + 7 + 22 - 20$

são consideradas *adições algébricas*.

Toda expressão numérica que contém adição e subtração representa uma adição algébrica.

Veja o exemplo:

1. Calcular a soma algébrica $-17 + 40 + 21 - 16 - 33$.

$-17 + 40 + 21 - 16 - 33 = +61 - 66 = -5$

Observe estes outros exemplos:

2. $10 + (-6) = 10 - 6 = +4$

3. $-7 + (-5 + 4) = -7 - 5 + 4 = -12 + 4 = -8$

Quando uma adição algébrica contém parênteses precedidos do sinal +, podemos eliminar esses parênteses, bem como o sinal que os precede, escrevendo cada número que está no interior dos parênteses *com o seu próprio sinal*.

Acompanhe, agora, estes exemplos:

4. $10 - (-6) = 10 + (+6) = 10 + 6 = +16$

5. $-7 - (-5 + 4) = -7 + (+5 - 4) = -7 + 5 - 4 = +5 - 11 = -6$

6. $8 - (7 + 3 - 10) = 8 + (-7 - 3 + 10) = 8 - 7 - 3 + 10 = +18 - 10 = +8$

Quando uma adição algébrica contém parênteses precedidos do sinal −, podemos eliminar esses parênteses, bem como o sinal que os precede, escrevendo cada número que está no interior dos parênteses *com o sinal trocado*.

As mesmas regras valem para as adições algébricas onde aparecem colchetes e chaves, além dos parênteses.

Vejamos, então, alguns exemplos:

1. Calcular a soma algébrica $20 + (-9 + 12) - (-15 + 20)$.

Vamos fazer esse cálculo de dois modos diferentes:

1º modo:

$20 + (-9 + 12) - (-15 + 20) =$

$= 20 - 9 + 12 + 15 - 20 =$ ⟶ eliminamos os parênteses

$= +47 - 29 =$

$= +18$

2º modo:

$20 + (-9 + 12) - (-15 + 20) =$

$= 20 + (+3) - (+5) =$ ⟶ efetuando as operações no interior dos parênteses

$= 20 + 3 - 5 =$

$= +23 - 5 =$

$= +18$

2. Calcular o valor da expressão $20 + [-1 - (-9 + 21) + 3]$.

$20 + [-1 - (-9 + 21) + 3] =$

$= 20 + [-1 + 9 - 21 + 3] =$ ⟶ eliminamos os parênteses

$= 20 - 1 + 9 - 21 + 3 =$ ⟶ eliminamos os colchetes

$= +32 - 22 =$

$= +10$

3. Calcular a soma algébrica $2 - \{-11 + [17 - (-12 + 10) - 3]\}$.

$2 - \{-11 + [17 - (-12 + 10) - 3]\} =$

$= 2 - \{-11 + [17 + 12 - 10 - 3]\} =$ ⟶ eliminamos os parênteses

$= 2 - \{-11 + 17 + 12 - 10 - 3\} =$ ⟶ eliminamos os colchetes

$= 2 + 11 - 17 - 12 + 10 + 3 =$ ⟶ eliminamos as chaves

$= +26 - 29 =$

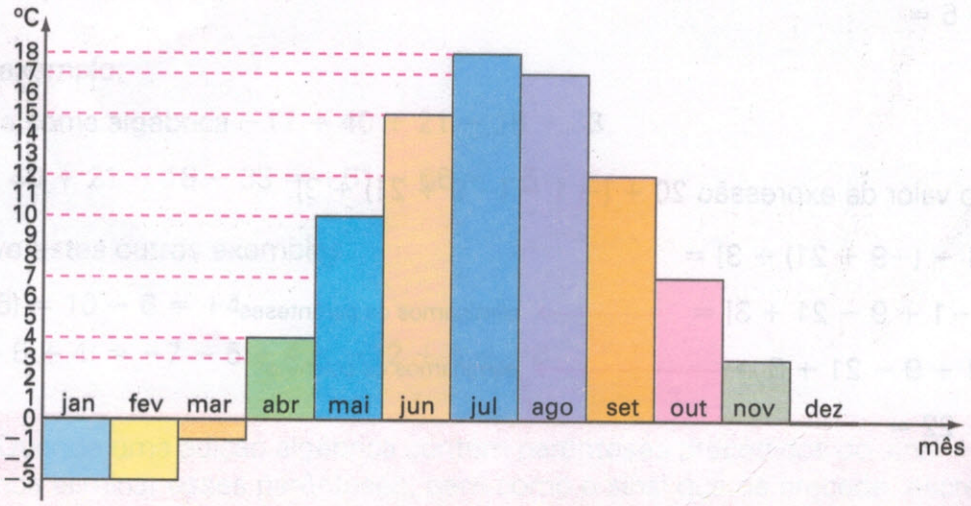
$= -3$

Explorando Gráficos

Estocolmo é uma das capitais mais belas da Escandinávia. Se observarmos sua localização no mapa, veremos que a capital sueca é formada por várias ilhas e que fica em águas árticas geladas.

Hiroshi Higuchi/Kino

Observe o gráfico com as temperaturas médias anuais em Estocolmo:



1. Em que mês a temperatura média é:

a) maior?

b) menor?

2. A temperatura média de dezembro é maior ou menor que a de fevereiro?

3. De quanto variou a temperatura:

a) de abril para maio?

b) de dezembro para janeiro?

4. Qual é a média de temperatura:

a) no 1º semestre desse ano?

b) no 2º semestre desse ano?

FIXAÇÃO

1 Escreva sem parênteses cada uma das expressões:

a) $-(+9)$

b) $-(-11)$

c) $+(-13)$

d) $+(+21)$

e) $3 - (-2)$

f) $-(-1 + 10)$

g) $7 + (6 - 3)$

h) $1 - (-1 + 5)$

i) $9 + (-4 - 2)$

j) $-(1 + 1 - 4)$

2 Um número x é tal que $x = -9 + (-7 + 11) - (-13 + 11)$. Nessas condições, o número x é um número inteiro positivo ou negativo?

3 Calcule as somas algébricas:

a) $6 + (-9 + 1)$

b) $8 - (-6 + 10)$

c) $-10 + (6 - 4)$

d) $2 + (2 + 5 - 7)$

e) $-5 + (2 - 4) - (7 - 1)$

f) $(-5 + 3) - (5 - 9) + (8 - 1) - 11$

g) $10 + (-10 + 5) - (1 + 11 - 4)$

h) $2 - (-1 - 5 + 8) + (7 - 3) - 4$

4 Dados os números $x = 1 - [4 + (4 - 2 - 5) - (-7 + 3)]$ e $y = 2 - [7 - (-1 - 3 + 6) - 8]$, use os símbolos $>$ ou $<$ para comparar os números x e y.

5 Calcule as somas algébricas:

$-17 + 43 + 14 + 23 - 45$

$24 - 7 - 8 - 10 - 4 + 31 - 19$

$19 - 21 + 36 - 100 - 35 + 100$

$-23 + 24 - 25 + 26 - 27 + 28$

$210 + 60 - 126 + 63 - 208 + 117$

$-99 + 85 - 121 - 310 + 420 + 115$

a) Qual a cor do cartão que apresenta a maior soma?

b) Qual a cor do cartão que apresenta a menor soma?

6 Eliminando parênteses, colchetes e chaves, determine as somas algébricas:

a) $30 + [-16 - (-7 + 10)]$

b) $-10 - [11 + (-10 - 6) + 1]$

c) $18 - (14 + 15) - [13 - (16 - 21)]$

d) $-(-22) - [29 + (27 - 23 - 26) - 28]$

e) $9 - (-10) - [-21 - (-13 - 13 + 25)] - (-18)$

f) $11 + [-17 - (-22 + 16) + (-29)] - (-46 + 54)$

7 O número inteiro a é tal que $a = 1 - (-2) - [-(-2) - 3 - (-6 + 2)]$. Nessas condições, pode-se dizer que $a = 0$?

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Já vimos que a idéia do número negativo só foi plenamente aceita a partir do século XVI, quando o homem passou a ter necessidade de usar a adição e a subtração de números inteiros.

Entretanto, a multiplicação com números negativos foi mais difícil de ser aceita e compreendida na época. Só a partir dos séculos XVI e XVII é que os matemáticos, aplicando seus conhecimentos sobre a multiplicação de números naturais, puderam dar um resultado para a multiplicação de dois números inteiros.

Na multiplicação de números inteiros, devemos considerar os seguintes casos:

◆ Os dois fatores são números positivos.

Considerando a multiplicação dos números naturais, temos:

$(+6) \cdot (+4) = 6 \cdot 4 = 24$ ou $+24$

$+4 = 4$

$+6 = 6$

Ou ainda:

$(+8) \cdot (+12) = +96$

$(+20) \cdot (+13) = +260$

A multiplicação de dois números inteiros positivos dá um número inteiro positivo.

◆◆ Um fator é número inteiro positivo e o outro é número inteiro negativo.

Observe:

$(+6) \cdot (-4) = 6 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -24$

$(+6) \cdot (-4) = -24$

Consideremos, agora, a multiplicação:

$(-6) \cdot (+4) = -(+6) \cdot (+4) = -(+24) = -24$

Então: $(+6) \cdot (-4) = -24$ e $(-6) \cdot (+4) = -24$

A multiplicação de um número inteiro positivo por um número inteiro negativo, em qualquer ordem, resulta em um número inteiro negativo.

◆◆ Os dois fatores são números inteiros negativos.

Consideremos a tabela de multiplicação:

×	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2
−6							

Sabemos que:

$(-6) \cdot 0 = 0$ $\quad (-6) \cdot (+1) = -6$ $\quad (-6) \cdot (+2) = -12$

Colocando esses resultados na tabela, temos:

×	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2
−6					0	−6	−12

+6 +6

Observando a linha dos resultados, notamos que cada resultado tem *seis unidades a mais* que o número à sua direita.

Aplicando esse fato, vamos preencher os quadrados restantes.

×	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2
−6	+24	+18	+12	+6	0	−6	−12

+6 +6 +6 +6

Essa tabela nos leva a concluir que:

A multiplicação de dois números inteiros negativos resulta em um número inteiro positivo.

Observação:

Usando o oposto de um número inteiro, podemos chegar ao mesmo resultado. Veja os exemplos:

1. $(-6) \cdot (-2) = -(+6) \cdot (-2) = -(-12) = +12$

2. $(-6) \cdot (-4) = -(+6) \cdot (-4) = -(-24) = +24$

Dos casos apresentados, podemos estabelecer a seguinte regra:

Para determinar o produto de dois números inteiros (diferentes de zero), calculamos o produto dos módulos dos fatores. Daí:

- Se os dois fatores têm o mesmo sinal, o produto é um número *positivo.*

  Exemplos:

  1. $(+7) \cdot (+3) = +21$
  2. $(+9) \cdot (+12) = +108$
  3. $(-9) \cdot (-2) = +18$
  4. $(-13) \cdot (-6) = +78$

- Se os dois fatores têm sinais diferentes, o produto é um número *negativo.*

  Exemplos:

  1. $(+7) \cdot (-3) = -21$
  2. $(+9) \cdot (-12) = -108$
  3. $(-9) \cdot (+2) = -18$
  4. $(-13) \cdot (+6) = -78$

Quando se trata da multiplicação de três ou mais números inteiros, utilizamos as mesmas regras dos números naturais.

Veja os exemplos:

1. $(-7) \cdot (+2) \cdot (-5) = (-14) \cdot (-5) = +70$

2. $(+2) \cdot (-15) \cdot (-3) \cdot (-6) = (-30) \cdot (+18) = -540$

As propriedades da multiplicação

A multiplicação de dois números inteiros é sempre possível (*fechamento*).

Exemplos:

1. $(+7) \cdot (+9) = +63$ e $+63 \in \mathbb{Z}$
2. $0 \cdot (-41) = 0$ e $0 \in \mathbb{Z}$
3. $(-2) \cdot (+16) = -32$ e $-32 \in \mathbb{Z}$
4. $(-7) \cdot (-11) = +77$ e $+77 \in \mathbb{Z}$

A multiplicação de dois números inteiros apresenta a propriedade *comutativa*.

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(-9) \cdot (+12) = -108 \\ (+12) \cdot (-9) = -108\end{array}\right\} \longrightarrow (-9) \cdot (+12) = (+12) \cdot (-9)$$

A multiplicação de três números inteiros apresenta a propriedade *associativa*.

Exemplo:

$$(-10) \cdot (+8) \cdot (+5) = (-80) \cdot (+5) = -400$$

$$(-10) \cdot (+8) \cdot (+5) = (-10) \cdot (+40) = -400$$

Então:

$$[(-10) \cdot (+8)] \cdot (+5) = (-10) \cdot [(+8) \cdot (+5)]$$

O número $+1$ é o *elemento neutro* da multiplicação de números inteiros.

Exemplos:

1. $(+8) \cdot (+1) = (+1) \cdot (+8) = +8$
2. $(-10) \cdot (+1) = (+1) \cdot (-10) = -10$

A multiplicação de números inteiros apresenta a propriedade *distributiva*.

Para multiplicar um número inteiro por uma soma algébrica, podemos multiplicar o número por cada uma das parcelas e adicionar, a seguir, os resultados obtidos.

Exemplos:

1. $(+6) \cdot [(+3) + (-5)] = (+6) \cdot (+3) + (+6) \cdot (-5) = (+18) + (-30) = 18 - 30 = -12$

2. $(-9) \cdot (-3 + 7) = (-9) \cdot (-3) + (-9) \cdot (+7) = (+27) + (-63) = +27 - 63 = -36$

Expressões numéricas

Vamos calcular o valor de algumas expressões numéricas simples. Observe os exemplos:

1. Calcular o valor da expressão numérica $12 - (-3) \cdot (-5)$.

$12 - (-3) \cdot (-5) =$

$= 12 - (+15) =$ ⟶ efetuamos a multiplicação

$= 12 - 15 =$ ⟶ eliminamos os parênteses

$= -3$

2. Determinar o valor da expressão numérica $20 + 3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-5)$.

$20 + 3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-5) =$

$= 20 + (-12) - (-10) =$ ⟶ efetuamos as multiplicações

$= 20 - 12 + 10 =$ ⟶ eliminamos os parênteses

$= 30 - 12 =$

$= +18$

3. Qual é o valor numérico da expressão $5x - xy$, quando $x = -3$ e $y = +6$?

Vamos, inicialmente, estabelecer que:

- ✓ $5x$ é o mesmo que $5 \cdot x$
- ✓ xy é o mesmo que $x \cdot y$

$5 \cdot x - x \cdot y =$

$= 5 \cdot (-3) - (-3) \cdot (+6) =$ ⟶ substituímos cada letra pelo valor dado

$= (-15) - (-18) =$

$= -15 + 18 =$

$= +3$

FIXAÇÃO

1 Calcule:

a) $(+8) \cdot (-9)$

b) $(-6) \cdot (-5)$

c) $(+7) \cdot (+4)$

d) $(+9) \cdot (+7)$

e) $(-8) \cdot (+6)$

f) $(+5) \cdot (-11)$

g) $0 \cdot (+13)$

h) $(-6) \cdot (-18)$

i) $(+3) \cdot (+21)$

j) $(-8) \cdot 0$

l) $(-11) \cdot (-21)$

m) $(-20) \cdot (+17)$

n) $(+17) \cdot (+17)$

o) $(-5) \cdot (-32)$

2 Calcule:

a) $(-7) \cdot (+11) \cdot (-2)$

b) $(-9) \cdot (-5) \cdot (-3)$

c) $(-12) \cdot (-6) \cdot (+3)$

d) $(-9) \cdot (-9) \cdot (-4) \cdot (-1)$

e) $(-8) \cdot (+10) \cdot (+7) \cdot (+2)$

f) $(-8) \cdot (+6) \cdot 0 \cdot (-11)$

3 Existem seis multiplicações de dois números inteiros cujo resultado dá $+20$. Quais são essas multiplicações?

4 Um número inteiro x é expresso por $(-5) \cdot (-4) - (-9)$. Esse número x é positivo ou negativo?

5 Mostre que:

a) $(-7) \cdot [(+6) \cdot (-5)] = [(-7) \cdot (+6)] \cdot (-5)$

b) $(-9) \cdot (+5) = (+5) \cdot (-9)$

6 Calcule o valor da expressão $-7 \cdot (+6 - 8)$ de duas maneiras diferentes.

7 Use a propriedade distributiva da multiplicação para calcular $-5 \cdot (-8 + 5)$.

8 Sem realizar a operação, determine o número inteiro que devemos colocar no lugar do número x para que se tenha:

a) $x \cdot (-16) = -16$

b) $x \cdot (-5) = (-5) \cdot (+9)$

c) $x \cdot (-8) = 0$

d) $x \cdot (+1) = +11$

9 Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas:

a) $81 + (-20) \cdot (+4)$

b) $(-4) \cdot (-7) - 30$

c) $-23 - (-6) \cdot (+3)$

d) $(-9) \cdot (+6) - (+2) \cdot (-27)$

e) $19 - (-4) \cdot (+5)$

f) $7 \cdot (-3) - 9 \cdot (-6) + 11 \cdot (-2)$

g) $(+5) \cdot (+11) - 37 - (-2) \cdot (+14)$

h) $18 - 3 \cdot (-7) + 9 \cdot (-4) - 20$

10 Qual é o número inteiro que se deve colocar no lugar de x para que sejam verdadeiras as igualdades?

a) $x \cdot (+2) = -6$

b) $(-5) \cdot x = +50$

c) $x \cdot (-5) = -10$

11 Determine o valor numérico de:

a) $2x + 5y$, quando $x = +7$ e $y = -2$

b) $xy + 2x$, quando $x = -6$ e $y = -3$

c) $3a - 7b$, quando $a = +8$ e $b = -7$

d) $2a + 5b - 10$, quando $a = +10$ e $b = -2$

e) $3a - 5b + 4c$, quando $a = -1$, $b = -1$ e $c = -1$

f) $10 - a + ab - 2b$, quando $a = -1$ e $b = +3$

12 Encontre:

a) dois números inteiros negativos cuja soma é -5 e cujo produto é $+6$

b) dois números inteiros, um positivo e outro negativo, cuja soma é $+3$ e cujo produto é -10.

13 Sendo $xy = -20$, calcule:

a) $xy + 20$

b) $(xy) \cdot (-1)$

c) $(xy) \cdot (+1)$

d) $(-5) \cdot (xy)$

14 Sabendo que $(x + y) = -9$ e $(x - y) = -4$, determine o valor de:

a) $(x + y) \cdot (x + y)$

b) $(x - y) \cdot (x - y)$

c) $(x + y) \cdot (x - y)$

14 DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Considerando a divisão exata dos números naturais, temos:

$40 : 5 = 8$, pois $5 \cdot 8 = 40$

$36 : 9 = 4$, pois $9 \cdot 4 = 36$

Vamos aplicar esses conhecimentos para estudar a divisão exata de números inteiros.

Veja os cálculos em cada cartão:

$(+20) : (+5)$

$(+20) : (+5) = q \longrightarrow (+5) \cdot q = (+20) \longrightarrow q = (+4)$

Logo: $(+20) : (+5) = +4$

$(+20) : (-5)$

$(+20) : (-5) = q \longrightarrow (-5) \cdot q = (+20) \longrightarrow q = (-4)$

Logo: $(+20) : (-5) = -4$

$(-20) : (+5)$

$(-20) : (+5) = q \longrightarrow (+5) \cdot q = (-20) \longrightarrow q = (-4)$

Logo: $(-20) : (+5) = -4$

$(-20) : (-5)$

$(-20) : (-5) = q \longrightarrow (-5) \cdot q = (-20) \longrightarrow q = (+4)$

Logo: $(-20) : (-5) = +4$

Considerando os exemplos dados, concluímos que:

Para efetuar a divisão exata de um número inteiro por outro número inteiro, diferente de zero, dividimos o módulo do dividendo pelo módulo do divisor. Daí:

- Quando o dividendo e o divisor têm o mesmo sinal, o quociente é um número inteiro *positivo*.

  Exemplos:

  $(+20) : (+5) = +4$ $\qquad$ $(-20) : (-5) = +4$

- Quando o dividendo e o divisor têm sinais diferentes, o quociente é um número inteiro *negativo*.

  Exemplos:

  $(+20) : (-5) = -4$ $\qquad$ $(-20) : (+5) = -4$

Observações:

◆ A divisão nem sempre pode ser realizada no conjunto $\mathbb{Z}$. Por exemplo, $(+9) : (-2)$ ou $(-20) : (-7)$ são divisões que não podem ser realizadas em $\mathbb{Z}$, pois o resultado não é um número inteiro.

◆◆ No conjunto $\mathbb{Z}$, a divisão não é comutativa, não é associativa e não tem a propriedade do elemento neutro.

Expressões numéricas simples

Observe os seguintes exemplos, onde trabalhamos com expressões numéricas simples:

1. Qual o valor da expressão numérica $10 - (-8) : (+4)$?

$10 - (-8) : (+4) =$

$= 10 - (-2) =$ ⟶ efetuamos a divisão

$= 10 + 2 =$ ⟶ eliminamos os parênteses

$= +12$

2. Calcular o valor da expressão numérica $5 + 12 : (-2) - 3 \cdot (-1)$.

$5 + 12 : (-2) - 3 \cdot (-1) =$

$= 5 + (-6) - (-3) =$ ⟶ efetuamos a divisão e a multiplicação

$= 5 - 6 + 3 =$ ⟶ eliminamos os parênteses

$= +2$

FIXAÇÃO

1 A divisão exata de um número inteiro positivo por um número inteiro negativo dá um número inteiro positivo ou negativo?

2 Numa divisão exata de números inteiros, os dois números possuem o mesmo sinal. Essa divisão dá como resultado um número inteiro positivo ou negativo?

3 Quanto dá a divisão de zero por um número inteiro negativo?

4 Entre as divisões:

$(+9) : (-9)$, $(-3) : (-2)$, $0 : (+5)$,

$(-2) : (+1)$, $(+11) : (+5)$ e $(+7) : 0$,

quais podem ser efetuadas no conjunto $\mathbb{Z}$?

5 Qual o valor de x na divisão $x : (-8) = +2$?

6 Sabendo-se que $y \neq 0$ e que $x : y = -1$, você pode dizer que x e y são números inteiros opostos?

7 Vamos calcular:

a) $(-9) : (+3)$

b) $(-11) : (-11)$

c) $(+21) : (+7)$

d) $(+36) : (-4)$

e) $0 : (+20)$

f) $(-31) : (+31)$

g) $(+45) : (-3)$

h) $(+52) : (+2)$

i) $(-65) : (-5)$

j) $(-90) : (+6)$

l) $(+64) : (+16)$

m) $(-39) : (-13)$

n) $(+96) : (-24)$

o) $(-200) : (+25)$

p) $(+63) : (+21)$

q) $(+81) : (-27)$

8 Mostre que
$(-20 + 45) : (-5) = (-20) : (-5) + (+45) : (-5)$.

9 Mostre que
$[(-16) : (-4)] : (-4) \neq (-16) : [(-4) : (-4)]$.

10 Quanto dá a divisão a : b, quando:

a) *a* e *b* são números inteiros iguais, diferentes de zero?

b) *a* e *b* são números inteiros opostos?

11 Vamos calcular o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas:

a) $31 + (-40) : (+2)$

b) $-10 - 20 : (+4)$

c) $(+30) : (-6) + (-18) : (+3)$

d) $7 : (-7) + 2 \cdot (-6) + 11$

e) $(-36) : (-4) + 3 \cdot (-3)$

f) $35 - 6 \cdot (+6) + (+54) : (-6)$

g) $2 + (-75) : (-5) - 4 \cdot (-1)$

h) $46 : (-23) + 7 - 4 \cdot (+2)$

i) $8 \cdot (-11) + 200 : (+2) - 12$

12 Escreva o número que dividido por -6 dá como quociente:

a) $+2$

b) $+1$

c) -4

d) -10

13 Sabendo que $x = 25 : (-25) - 4 : (+4) - (-10)$ e $y = 12 + (-50) : (+5) - 3 \cdot (+1)$, calcule:

a) $x + y$

b) $x - y$

c) $x \cdot y$

d) $x : y$

14 De acordo com os resultados encontrados no exercício anterior, você pode dizer que:

a) $x + y = x - y$?

b) $x \cdot y = x : y$?

POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Já definimos para os números naturais que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}, \text{ com } a \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1.$$

A mesma definição será usada para os números inteiros, ou seja:

Dados dois números inteiros *a* e *n*, com $n > 1$, a expressão a^n representa um produto de *n* fatores iguais a *a*.

$$a^{\overset{\text{expoente}}{n}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

base

Quando tratamos da potenciação de números inteiros, sendo a base um número inteiro positivo ou negativo, temos dois casos a considerar:

◆ O expoente é um número par.

Observe:

1. $(+2)^2 = (+2) \cdot (+2) = +4$
   → a potência é um número positivo
2. $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$
   → a potência é um número positivo
3. $(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$
   → a potência é um número positivo
4. $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$
   → a potência é um número positivo

Quando o expoente é um *número par*, a potência é sempre um *número inteiro positivo*.
Exemplos:

$(+12)^2 = +144$ $\qquad$ $(-10)^4 = +10\,000$

◆◆ O expoente é um número ímpar.

Observe:

1. $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$
   → a potência tem o mesmo sinal da base
2. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
   → a potência tem o mesmo sinal da base
3. $(+2)^5 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +32$
   → a potência tem o mesmo sinal da base
4. $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$
   → a potência tem o mesmo sinal da base

Quando o expoente é um *número ímpar*, a potência tem sempre o *mesmo sinal da base*.
Exemplos:

$(+7)^3 = +343$ $\qquad$ $(-2)^7 = -128$

É importante observar que:

- Para todo número inteiro *a*, definimos $a^1 = a$.

  Exemplos:

  $(+9)^1 = +9$ $\qquad$ $(-8)^1 = -8$

- Para todo número inteiro *a*, com $a \neq 0$, definimos $a^0 = 1$.

  Exemplos:

  $(+9)^0 = 1$ $\qquad$ $(-8)^0 = 1$

Propriedades da potenciação em $\mathbb{Z}$

Vejamos, a seguir, as propriedades da potenciação no conjunto $\mathbb{Z}$:

- Produto de potências de mesma base.

  Exemplos:

  $(+5)^3 \cdot (+5)^6 = (+5)^{3+6} = (+5)^9$

  $(-2)^4 \cdot (-2)^6 \cdot (-2)^5 = (-2)^{4+1+5} = (-2)^{10}$

- Quociente de potências de mesma base.

  Exemplos:

  $(+6)^5 : (+6)^2 = (+6)^{5-2} = (+6)^3$

  $(-10)^8 : (-10)^3 = (-10)^{8-3} = (-10)^5$

- Potência de uma potência.

  Exemplos:

  $[(+10)^2]^5 = (+10)^{2 \cdot 5} = (+10)^{10}$

  $[(-8)^3]^2 = (-8)^{3 \cdot 2} = (-8)^6$

- Potência de um produto (ou de um quociente).

  Exemplos:

  $[(+6) \cdot (-5)]^2 = (+6)^2 \cdot (-5)^2$

  $[(-10) : (+2)]^3 = (-10)^3 : (+2)^3$

Observação:

As expressões $(-2)^2$ e -2^2 são diferentes.

$(-2)^2$ representa o *quadrado* do número -2 e $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$.

-2^2 representa o *oposto do quadrado* do número 2 e $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$.

Expressões numéricas simples

Observe os exemplos:

1. Determinar o valor da expressão numérica $(-3)^2 - (-2)^3$.

$(-3)^2 - (-2)^3 =$
$= (+9) - (-8) =$ ⟶ efetuamos as potenciações
$= +9 + 8 =$ ⟶ eliminamos os parênteses
$= +17$

2. Calcular o valor da expressão numérica $3 \cdot (-2)^2 + (-36) : (-3)^2$.

$3 \cdot (-2)^2 + (-36) : (-3)^2 =$
$= 3 \cdot (+4) + (-36) : (+9) =$ ⟶ efetuamos as potenciações
$= (+12) + (-4) =$ ⟶ efetuamos as multiplicações e divisões
$= +12 - 4 =$ ⟶ eliminamos os parênteses
$= +8$

3. Qual é o valor numérico da expressão $x^3 - 2x^2 + 5x + 4$, quando $x = -1$?

$x^3 - 2x^2 + 5x + 4 =$
$= (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 4 =$ ⟶ substituímos a letra pelo valor dado
$= (-1) - 2 \cdot (+1) + 5 \cdot (-1) + 4 =$ ⟶ efetuamos as potenciações
$= (-1) - (+2) + (-5) + 4 =$ ⟶ efetuamos as multiplicações
$= -1 - 2 - 5 + 4 = -4$ ⟶ eliminamos os parênteses

FIXAÇÃO

1 Se o número x é inteiro negativo, o número x^2 será inteiro positivo ou negativo?

2 Sabe-se que o número a é inteiro negativo. O número expresso por a^3 será inteiro positivo ou negativo?

3 Calcule:

a) o quadrado de −17
b) o cubo de +15
c) o quadrado de +40
d) o cubo de −30
e) a quarta potência de −5
f) a quinta potência de +3
g) a quarta potência de +5

4 Calcule:

a) $(+9)^2$
b) $(-9)^2$
c) $(+9)^3$
d) $(-9)^3$
e) $(+2)^5$
f) $(-2)^5$
g) $(-1)^{10}$
h) $(-3)^4$
i) $(-7)^3$
j) $(-100)^0$
l) $(-1)^{101}$
m) $(-25)^2$
n) $(+10)^6$
o) $(-1)^9$
p) $(-1)^{200}$
q) $(+1)^{99}$

5 Sabendo que $a = (-1)^{100}$ e $b = (-1)^{101}$, calcule o valor de:

a) $a + b$
b) $a - b$

6 Reduza a uma só potência:

a) $(-8)^5 \cdot (-8) \cdot (-8)^4$

b) $[(+2)^6]^2$

c) $(-10)^9 : (-10)^6$

d) $(+9) \cdot (+9)^{11} \cdot (+9)^8$

e) $(-13)^{20} : (-13)^{14}$

f) $[(+7)^4]^3$

g) $(+10)^5 \cdot (+10) \cdot (+10)^8$

h) $(+20)^7 : (+20)^6$

7 Aplicando as propriedades das potências de mesma base, calcule o valor da expressão:

a) $[(-4)^7 \cdot (-4)^{10} \cdot (-4)] : [(-4)^8]^2$

b) $[(-2)^6]^2 : [(-2)^6 \cdot (-2)^2 \cdot (-2)]$

8 Calcule o valor das expressões numéricas:

a) $(-9)^2 - (+5) \cdot (+16)$

b) $(-2)^4 : (+16) \cdot (-1)^7$

c) $(-6)^2 - (-7)^2 + 13^0$

d) $5^2 - (-3)^3 + (-4)^2$

e) $4 \cdot (-5)^3 + (-20)^2$

f) $11^2 - 4 \cdot (-5)^2 + 10^0$

g) $17 - 3 \cdot (-2)^2 - (-6)^2 \cdot (-1)^7$

h) $7 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2)^3 - 10^2$

9 Calcule o valor numérico da expressão:

a) $x^3 + 1$, quando $x = -3$

b) $x^4 + 1$, quando $x = -2$

c) $x^4 + x^3$, quando $x = -1$

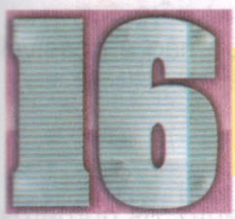
d) $a^3 - b^3$, quando $a = -4$ e $b = -6$

e) $x^2 + y^2 - xy$, quando $x = +7$ e $y = -5$

10 Se $a = -(-3)^3$ e $b = (-1)^8$, calcule $a + b$.

11 Se $x = -(-2)^5$ e $y = -(+2)^5$, calcule $x - y$.

12 Sabendo que $a = (-1)^{50}$, $b = -(-1)^{50}$ e $c = -(-1)^{99}$, calcule o valor de $ab + bc - ac$.



RAIZ QUADRADA EXATA DE NÚMEROS INTEIROS

Consideremos as seguintes situações:

1ª Quais os números inteiros cujos quadrados são iguais a 16?

Os números são +4 ou −4, pois $\begin{cases} (+4)^2 = +16 \\ (-4)^2 = +16 \end{cases}$

2ª Quais os números inteiros cujos quadrados são iguais a 81?

Os números são +9 ou −9, pois $\begin{cases} (+9)^2 = +81 \\ (-9)^2 = +81 \end{cases}$

Define-se:

Raiz quadrada exata de um número inteiro é também um número inteiro que, elevado ao quadrado, dá o número inicial.

Podemos dizer que:

✓ A raiz quadrada de 16 é +4 ou −4.

✓ A raiz quadrada de 81 é +9 ou −9.

Como, em Matemática, uma operação (como a raiz quadrada) não pode apresentar dois resultados diferentes, fica definido que:

✓ A raiz quadrada de 16 é o número positivo +4.

Indica-se: $\sqrt{16} = +4$

✓ A raiz quadrada de 81 é o número positivo +9.

Indica-se: $\sqrt{81} = +9$

É claro que existe o oposto do número $\sqrt{16}$, que é $-\sqrt{16}$. Então:

$$-\sqrt{16} = -(+4) = -4$$

O mesmo ocorre com o número $\sqrt{81}$, cujo oposto é $-\sqrt{81}$. Então:

$$-\sqrt{81} = -(+9) = -9$$

A não-existência da raiz quadrada em $\mathbb{Z}$

Consideremos as seguintes situações:

1ª Qual é o número inteiro que representa a raiz quadrada de 20?
Observamos que o número inteiro 20 não é quadrado de nenhum número inteiro, pois $4^2 = 16$ e $5^2 = 25$.
Como não há nenhum número inteiro entre 4 e 5, podemos concluir que não é possível obter a $\sqrt{20}$ no conjunto $\mathbb{Z}$.

2ª Qual é o número inteiro que elevado ao quadrado dá −25?
Sabemos que o quadrado de um número inteiro nunca é negativo. Portanto, os números negativos não podem representar quadrados de nenhum número inteiro.
Isso significa que os números inteiros negativos não têm raiz quadrada em $\mathbb{Z}$, ou seja, $\sqrt{-25}$ não existe no conjunto $\mathbb{Z}$.

FIXAÇÃO

1 Qual é o número inteiro, se existir, que representa a raiz quadrada de:

a) 25?
b) 64?
c) −81?
d) 1?

2 Entre os números $\sqrt{9}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{37}$, $\sqrt{64}$ e $\sqrt{80}$, quais não são números inteiros?

3 Determine o valor de:

a) $\sqrt{36}$
b) $-\sqrt{64}$
c) $\sqrt{100}$
d) $-\sqrt{49}$

4 Pela definição, calcule:

a) $\sqrt{400}$
b) $-\sqrt{900}$
c) $-\sqrt{2\,500}$
d) $\sqrt{144}$

5 O número p representa o valor da expressão $1 - (-\sqrt{100})$. Qual é o número p?

6 Sendo $x = \sqrt{81} : (4^2 - 5^2)$, qual é o valor de x?

7 Existe algum número inteiro que representa $\sqrt{-25}$? Justifique.

17 EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Já aprendemos a calcular o valor de expressões numéricas simples. Veremos, agora, como calcular o valor numérico de expressões numéricas mais complexas.

Convém lembrar que as operações devem ser efetuadas na seguinte ordem:

> Inicialmente, as potenciações, a seguir, as divisões e multiplicações e, finalmente, a adição algébrica.
> Além disso, devemos respeitar a eliminação dos sinais de pontuação (parênteses, colchetes e chaves), começando sempre pelo mais interno.

Veja os exemplos:

1. Calcular o valor da expressão numérica.

$(-5 + 2)^2 : (-9) - [2 \cdot (-4 - 2) - (-1)^3 \cdot (-5 + 8)]$.

$(-5 + 2)^2 : (-9) - [2 \cdot (-4 - 2) - (-1)^3 \cdot (-5 + 8)] =$

$= (-3)^2 : (-9) - [2 \cdot (-6) - (-1)^3 \cdot (+3)] =$ ⟶ calculando o interior dos parênteses

$= (+9) : (-9) - [2 \cdot (-6) - (-1) \cdot (+3)] =$ ⟶ efetuando as potenciações

$= (-1) - [(-12) - (-3)] =$ ⟶ efetuando as divisões e multiplicações

$= -1 - [-12 + 3] =$ ⟶ eliminando os parênteses

$= -1 - [-9] =$ ⟶ calculando o interior dos colchetes

$= -1 + 9 =$ ⟶ eliminando os colchetes

$= +8$

2. Calcular o valor da expressão numérica $(-6)^2 : (+4) + [5^2 - (-40) : (-2)^3]$.

$(-6)^2 : (+4) + [5^2 - (-40) : (-2)^3] =$

$= (+36) : (+4) + [25 - (-40) : (-8)] =$

$= (+9) + [25 - (+5)] =$

$= +9 + [25 - 5] =$

$= +9 + [+20] =$

$= +9 + 20 =$

$= +29$

FIXAÇÃO

Vamos calcular o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas:

1 $(-7 - 4) \cdot (-9 + 2) - (-72 + 2) : (-5 - 5) + (-9 - 4 + 6)$

2 $(-9 - 3) : (-1 + 7) - [10 - (-4 - 3) \cdot (-5 + 4) + (-36) : (-1 - 3)]$

3 $(-1 - 4) \cdot (-10 + 16) - [(-8) : (+2) - 7 - (-1) \cdot (+5)]$

4 $(-50) : (-5 - 5) - [20 + (-42) : (+7) - (-35) : (-1 - 4)]$

5 $(-6)^2 : (-12) - (-3)^3 + (-2)^5 : (-4)^2 - 5^0$

6 $(-2 - 3)^2 : (-25) + [30 - (-10 + 6)^2 : (-2)^3 - 5^2]$

7 $(-7)^2 + [10^0 - (-3)^3 : (+9) - (-1)^9] - 4^2$

8 $2^2 + (2^5 : 2^2) - [(-3)^4 : (-3)^2 - 4^2 : (-11 + 7) + 10^0]$

9 $11 \cdot (-1)^4 + 7^0 - [60 + (-80) : (-2)^3] + (-6)^2$

10 $5^2 - 7 \cdot (-2)^3 - [-20 : (-2)^2 + 6 \cdot (-1)^4 - 3] + (-5)^2 : (-5)$

RETOMANDO o que aprendeu

1 Qual é o simétrico da diferença entre os números inteiros (-3) e (-1)?

2 O número inteiro x representa a diferença entre o quadrado do número -1 e o cubo do número -1. Qual é o número x?

3 Qual é o número que devo adicionar a $+8$ para obter -2?

4 Dois pontos, A e B, estão em linha reta. O ponto A está a uma altitude de 572 m, enquanto o ponto B está a uma profundidade de 108 m. Qual é a distância entre os pontos A e B?

5 Por qual número inteiro você deve dividir $+8$ para obter como resultado o número -1?

6 Um termômetro marcava $+5$ graus pela manhã. À tarde, a temperatura chegou a -2 graus. De quantos graus a temperatura baixou?

7 Entre as potências $(+2)^5$, $(-6)^2$, -3^2, $(-2)^3$ e $(-1)^{10}$, quais representam números inteiros positivos?

8 Se você multiplicar um número x pelo quadrado do número -10, você vai encontrar -300. Qual é o número x?

9 Quantos elementos do conjunto
$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq +3\}$
pertencem ao conjunto $\mathbb{Z}_-$?

10 Quantas das sentenças a seguir são verdadeiras?

a) $-2^4 = (-2)^4$

b) $-2^3 = (-2)^3$

c) $-2^0 = (-2)^0$

11 Durante o inverno, os termômetros de uma cidade A registraram -27 graus, enquanto os termômetros de uma cidade B registraram uma temperatura de -15 graus, no mesmo dia. Em qual das duas cidades a temperatura estava mais alta?

12 Se o número x representa o valor da expressão numérica $-5^0 + 3^0 - (-4)^0$, calcule o valor de:

a) x^2 b) x^5

13 Sabendo-se que o número x representa o valor de $2 - (-3 + 5) - [-1 + (-3 + 4) - (-2 - 6)]$, quanto vale:

a) o dobro do número x?

b) o quadrado do número x?

14 Calcule o valor da expressão numérica
$(-3)^2 \cdot [-9 + (-3)^3] : (-3)^2$.

15 Qual é a diferença entre o valor da expressão $(-2)^3 - (-8) : (-2)$ e o resultado da multiplicação $(-2) \cdot (-1) \cdot (+1) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (+2) \cdot (-2)$?

16 Se você simplificar a expressão
$[(-5)^{20} : (-5)^{17}] \cdot [(-5)^{11} : (-5)^{10}]$, qual é o número inteiro que você vai obter?

17 Sabe-se que o número x representa o valor da expressão $-(-3)^3 - (2^2)^3$ enquanto o número y representa o valor da expressão $(-2)^3 - (-3)^2 - (-5)^0 + (-2)^4$. Nessas condições, calcule o produto xy.

18 Duas pessoas, A e B, disputam 100 partidas de um certo jogo. Cada vez que A vence uma partida recebe 20 reais de B e cada vez que B vence, recebe 30 reais de A. Se A vencer 51 partidas, ela terá lucro ou prejuízo? De quantos reais?

19 Eliminando parênteses e colchetes, escreva da forma mais simples possível a expressão
$3x - (-2x + 7x) - [10x + (-4x - 2x) - (-7x + 10x)]$.

20 Qual é o valor numérico da expressão $a^3 - 3a^2x^2$, quando $a = 10$ e $x = 2$?

21 Determine o valor numérico da expressão
$a^3 - (b - c)^3$ quando $a = -3$, $b = +1$ e $c = +5$.

JORNAIS & REVISTAS

A revista *Veja*, de 18 de março de 1998, publicou matéria sobre o projeto de um avião de alta velocidade para passageiros. O projeto está sendo feito pelos engenheiros da Nasa, a agência espacial dos Estados Unidos e está sendo chamado, provisoriamente, de Transporte Civil de Alta Velocidade. O aparelho terá capacidade para até 300 passageiros e poderá usar a maioria dos aeroportos comerciais.

Os dois maiores problemas ambientais, barulho e danos à atmosfera, parece que foram superados. O novo avião poderá atingir velocidades de até 2 574 quilômetros por hora, três vezes mais que a dos jatos atuais.

A Nasa planeja dar início à montagem de um protótipo já no próximo ano. Se o cronograma for cumprido, em 2015 o novo avião estará voando comercialmente.

Velocidade máxima

O Transporte Civil de Alta Velocidade vai dar rapidez supersônica às rotas aéreas. Veja a diferença, em horas de vôo:

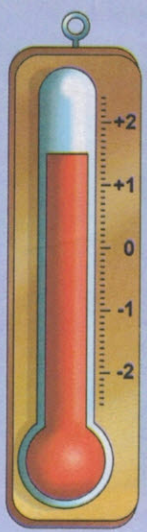
Com base nesse quadro, determine:

1. a diferença de tempo, em minutos, no vôo Rio-Lisboa, entre um avião subsônico e um supersônico do ano 2015.
2. a distância do Rio a Lisboa, sabendo que a velocidade média do supersônico será de, aproximadamente, 2 040 km/h.

3

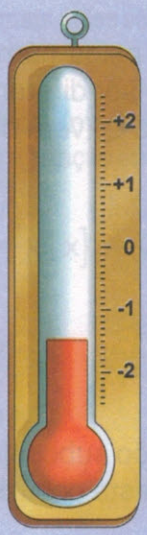
O conjunto dos números racionais

Veja as temperaturas registradas durante uma madrugada em duas cidades brasileiras:



Campos do Jordão - SP

São Leopoldo - RS



No termômetro da cidade de Campos do Jordão, a coluna de mercúrio está marcando uma temperatura entre 1 grau e 2 graus, ou seja, entre +1 grau e +2 graus. Neste caso, para sermos mais exatos, a coluna de mercúrio está marcando $\left(1+\frac{5}{10}\right)$ grau acima de zero, ou seja, + 1,5 grau.

No termômetro da cidade de São Leopoldo, a coluna de mercúrio está marcando uma temperatura entre 1 grau abaixo de zero e 2 graus abaixo de zero, ou seja, entre −1 grau e −2 graus. Neste caso, para sermos mais exatos, a coluna de mercúrio está marcando $\left(-1-\frac{5}{10}\right)$ grau abaixo de zero, ou seja, −1,5 grau.

Nos dois casos, usamos um número racional para indicar a temperatura:

- ✓ o número racional positivo $+1\frac{5}{10}$ ou +1,5 (figura 1)
- ✓ o número racional negativo $-1\frac{5}{10}$ ou −1,5 (figura 2)

Nesta Unidade, vamos ampliar nossos conhecimentos sobre os números racionais.

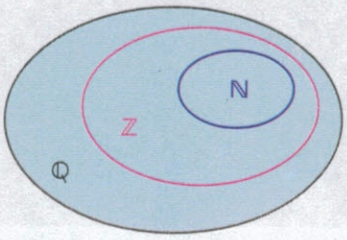
18 O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

O conjunto formado pelos números que podem ser escritos como o quociente de dois números inteiros, com divisor diferente de zero, é denominado *conjunto dos números racionais* e é representado pela letra $\mathbb{Q}$ (vem da palavra *quociente*).

Então:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$$

Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são subconjuntos de $\mathbb{Q}$. $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ está contido em $\mathbb{Q}$:



Módulo ou valor absoluto de um número racional

A exemplo do que vimos no conjunto dos números inteiros, temos:

- O módulo ou valor absoluto do número $+\frac{5}{3}$ é $\frac{5}{3}$.

  Indica-se: $\left|+\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$

- O módulo ou valor absoluto do número $-\frac{3}{7}$ é $\frac{3}{7}$.

  Indica-se: $\left|-\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$

- O módulo ou valor absoluto do número $-2{,}63$ é $2{,}63$.

  Indica-se: $|-2{,}63| = 2{,}63$

Quando dois números racionais de sinais contrários têm o mesmo módulo são chamados *opostos* ou *simétricos*.

São exemplos de números racionais opostos ou simétricos:

1. $+\frac{2}{3}$ e $-\frac{2}{3}$
2. $-3{,}5$ e $+3{,}5$
3. 15 e 25

FIXAÇÃO

1 O conjunto $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$, isto é, $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Q}$. Isso é verdade?

2 Escreva a quais conjuntos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) pertencem os números:

a) -5 c) $+\frac{3}{8}$

b) $+7$ d) $-1{,}5$

3 É correto afirmar que o zero é um número racional?

4 Entre os elementos do conjunto

$\left\{-\frac{4}{3}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 5\right\}$, indique quais pertencem ao conjunto:

a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Q}$

5 Entre os elementos do conjunto dado no exercício anterior, quais deles são números racionais não negativos?

6 Usando os símbolos $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence), dê a relação entre:

a) -4 e $\mathbb{N}$ g) $+6$ e $\mathbb{N}$

b) -4 e $\mathbb{Z}$ h) $+6$ e $\mathbb{Z}$

c) -4 e $\mathbb{Q}$ i) $+6$ e $\mathbb{Q}$

d) $+\frac{4}{9}$ e $\mathbb{N}$ j) $-1{,}6$ e $\mathbb{N}$

e) $+\frac{4}{9}$ e $\mathbb{Z}$ l) $-1{,}6$ e $\mathbb{Z}$

f) $+\frac{4}{9}$ e $\mathbb{Q}$ m) $-1{,}6$ e $\mathbb{Q}$

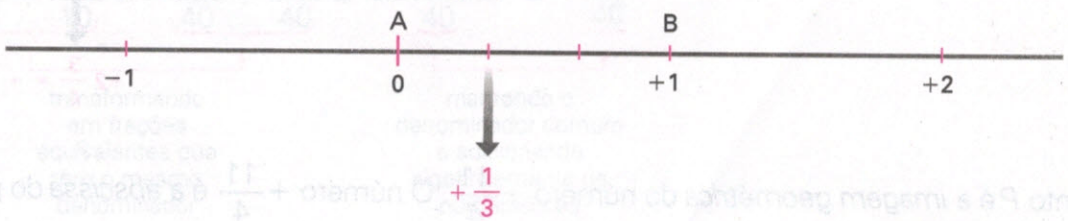
19 A RETA NUMÉRICA RACIONAL

Já estudamos que os números inteiros podem ser representados numa reta numérica.

O mesmo vai ocorrer com os números racionais relativos, como vamos ver nos exemplos a seguir:

1. Representar na reta numérica o número racional $+\frac{1}{3}$.

Sabemos que o número $+\frac{1}{3}$ está localizado entre os números inteiros 0 e $+1$. Então, vamos dividir o segmento $\overline{AB}$ em 3 partes iguais e considerar uma dessas partes a partir do ponto A, para a direita.

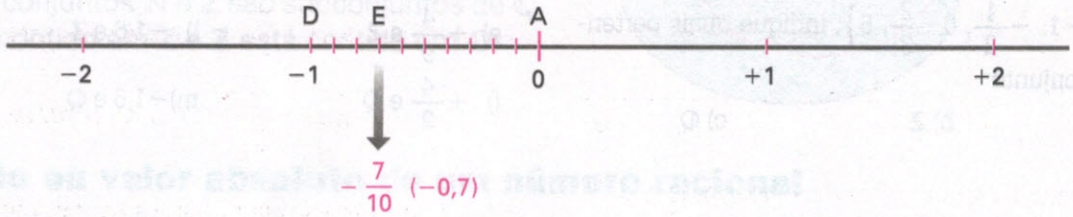


O ponto C chama-se *imagem geométrica* do número racional $+\frac{1}{3}$. O número $+\frac{1}{3}$ é chamado *abscissa* do ponto C.

2. Representar na reta numérica o número racional $-0,7$.

Vamos considerar que $-0,7 = -\frac{7}{10}$ (forma fracionária).

O número $-\frac{7}{10}$ está localizado entre os números inteiros -1 e 0. Então, vamos dividir o segmento $\overline{AD}$, que vai de -1 até 0, em dez partes iguais:

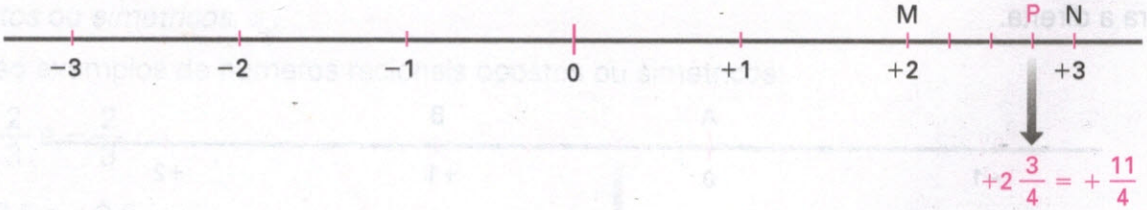


O ponto E é a *imagem geométrica* do número $-0,7$. O número $-0,7$ é a *abscissa* do ponto E.

3. Representar na reta numérica o número racional $+\frac{11}{4}$.

Vamos escrever o número $+\frac{11}{4}$ na forma mista: $+\frac{11}{4} = +2\frac{3}{4}$.

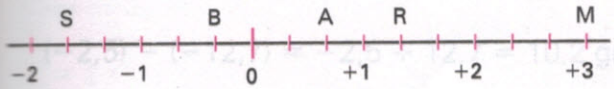
Esse número está localizado entre os números inteiros $+2$ e $+3$. Então, vamos dividir o segmento $\overline{MN}$ em 4 partes iguais:



O ponto P é a *imagem geométrica* do número $+\frac{11}{4}$. O número $+\frac{11}{4}$ é a *abscissa* do ponto P.

FIXAÇÃO

1 Observando a reta numérica racional, indique:



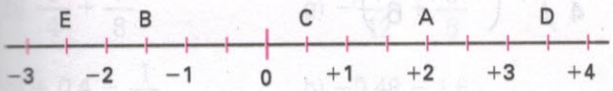
a) o ponto que corresponde ao número $+\frac{4}{3}$ $\left(\text{ou} + 1\frac{1}{3}\right)$?

b) o número racional que corresponde ao ponto B?

c) o número racional que corresponde ao ponto S?

d) o ponto que corresponde ao número $+\frac{2}{3}$?

e) o ponto que corresponde ao número $+3$?



2 Observando a reta numérica racional, responda:

a) Qual é a abscissa do ponto A?

b) Qual é a abscissa do ponto B?

c) Qual é a imagem geométrica do número $+\frac{7}{2}$ $\left(\text{ou} + 3\frac{1}{2}\right)$?

d) Qual é a imagem geométrica do número $-\frac{5}{2}$ $\left(\text{ou} - 2\frac{1}{2}\right)$?

e) Qual é a abscissa do ponto C?

3 Represente na reta numérica racional os pontos: (Sugestão: faça segmentos de 3 cm.)

a) A, de abscissa $+0{,}9$

b) B, de abscissa $-\frac{3}{5}$

c) C, de abscissa $+\frac{7}{3}$

d) D, de abscissa $-1{,}4$

e) R, de abscissa $+3$

f) S, de abscissa $-\frac{9}{4}$

4 Represente na reta numérica racional dois pontos opostos ou simétricos em relação à origem, dando a abscissa de cada ponto.

ADIÇÃO ALGÉBRICA DE NÚMEROS RACIONAIS

Para calcularmos a soma algébrica de dois ou mais números racionais, devemos aplicar os conhecimentos já adquiridos na 5ª série.

Vamos considerar os seguintes exemplos:

1. Calcular $-\frac{5}{8} + \frac{3}{10}$.

$$-\frac{5}{8} + \frac{3}{10} = -\frac{25}{40} + \frac{12}{40} = \frac{-25+12}{40} = -\frac{13}{40}$$

transformando em frações equivalentes que têm o mesmo denominador

mantendo o denominador comum e adicionando algebricamente os numeradores

2. Calcular $-\frac{7}{9} + 2 - \frac{1}{6}$.

$$-\frac{7}{9} + 2 - \frac{1}{6} = -\frac{14}{18} + \frac{36}{18} - \frac{3}{18} = \frac{-14 + 36 - 3}{18} = +\frac{19}{18}$$

3. Calcular $-\frac{5}{6} + 1{,}4$.

Vamos inicialmente colocar 1,4 na forma fracionária:

$$+1{,}4 = +\frac{14}{10}$$

Daí:

$$-\frac{5}{6} + 1{,}4 = -\frac{5}{6} + \frac{14}{10} = -\frac{25}{30} + \frac{42}{30} = \frac{-25 + 42}{30} = +\frac{17}{30}$$

4. Determinar o valor da expressão $\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) + \left(-1 + \frac{5}{6}\right)$.

$$\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) + \left(-1 + \frac{5}{6}\right) =$$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 1 + \frac{5}{6} =$ ⟶ eliminando os parênteses

$= \frac{4}{12} + \frac{6}{12} - \frac{9}{12} - \frac{12}{12} + \frac{10}{12} =$ ⟶ transformando em frações equivalentes que têm o mesmo denominador

$= \frac{4 + 6 - 9 - 12 + 10}{12} = -\frac{1}{12}$

5. Calcular o valor da expressão $1{,}6 - (-2{,}8) + [1{,}9 - (-5{,}6 + 8{,}1)]$.

$1{,}6 - (-2{,}8) + [1{,}9 - (-5{,}6 + 8{,}1)] =$

$= 1{,}6 + 2{,}8 + [1{,}9 + 5{,}6 - 8{,}1] =$ ⟶ eliminando os parênteses

$= 1{,}6 + 2{,}8 + 1{,}9 + 5{,}6 - 8{,}1 =$ ⟶ eliminando os colchetes

$= +11{,}9 - 8{,}1 = +3{,}8$

6. Qual é o valor numérico da expressão $a - b - c$, quando $a = +\frac{7}{3}$, $b = -2$ e $c = +\frac{11}{2}$?

$a - b - c =$

$= \left(+\frac{7}{3}\right) - (-2) - \left(+\frac{11}{2}\right) = +\frac{7}{3} + 2 - \frac{11}{2} =$ ⟶ substituindo cada letra pelo valor dado

$= +\frac{14}{6} + \frac{12}{6} - \frac{33}{6} =$

$= \frac{+14 + 12 - 33}{6} = -\frac{7}{6}$

7. De quantos graus aumenta a temperatura quando ela passa de −12,7 graus para −2,5 graus?
Para sabermos de quantos graus a temperatura aumenta, devemos fazer:

t_f (temperatura final) − t_i (temperatura inicial)

Sendo $t_f = -2{,}5$ graus e $t_i = -12{,}7$ graus, então:

$(-2{,}5) - (-12{,}7) = -2{,}5 + 12{,}7 = 10{,}2$ graus

FIXAÇÃO

1 Calcule:

a) $\frac{4}{9} - \frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{7}{8}$

c) $+0{,}4 - \frac{1}{5}$

d) $-3 + 2{,}35$

e) $\frac{7}{5} - \frac{5}{3}$

f) $-\frac{3}{4} + 0{,}9$

g) $-\frac{7}{12} + \frac{5}{6}$

h) $-0{,}48 - 1{,}6$

i) $\frac{3}{5} + 1{,}2$

j) $-\frac{1}{4} - \frac{7}{6}$

2 Calcule o valor de:

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}$

b) $-0{,}7 + 2 - \frac{7}{4}$

c) $1 - 0{,}47 - 1{,}9 + 0{,}63$

d) $-\frac{3}{5} + \frac{7}{8} - 1 + \frac{11}{10}$

e) $\frac{4}{9} - \frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$

3 Qual é o aumento da temperatura quando ela passa de:

a) +11,8 graus para +23,5 graus?

b) −8,5 graus para +1,5 grau?

4 Sabendo que $x = -\frac{2}{3}$ e $y = -\frac{3}{4}$, determine o valor da expressão:

a) $x + y$ b) $x - y$ c) $1 - x +$

5 Numa reta numérica, um ponto A está situado a −10,75 m de um ponto P, e um ponto B, tomado sobre a mesma reta, está a +13,65 m de P. Qual é a distância do ponto A ao ponto B?

6 Qual é o valor da expressão numérica

$\frac{1}{2} - \left(\frac{4}{5} - 0{,}9\right) - \left(-1 + \frac{1}{4} - 0{,}3\right)$?

7 Dados $a = -1{,}75$, $b = +3{,}6$ e $c = -4{,}21$, determine o valor da expressão $a - b + c$.

8 Qual é o valor da expressão

$0{,}7 - [-2 + (2{,}5 + 3{,}1 - 6{,}4) + 8{,}2]$?

9 Durante o dia, os termômetros de uma cidade registraram +2,5 graus. Durante a madrugada, a temperatura desceu 4 graus. Qual foi a temperatura registrada pelos termômetros durante a madrugada?

10 Entre quais números inteiros está o número x, sabendo-se que $x = \frac{1}{6} - \left[1{,}1 - \left(\frac{1}{2} - 0{,}4\right)\right]$?

11 Calcule o valor da expressão numérica

$\frac{3}{4} + \left(-2 + \frac{7}{5}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 1{,}5\right) - 0{,}9$.

21 MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Consideremos os seguintes exemplos:

1. Calcular $\left(-\frac{5}{9}\right) \cdot \left(+\frac{3}{7}\right)$.

Calculamos o produto dos módulos: $\frac{5}{\cancel{9}_{3}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{7} = \frac{5 \cdot 1}{3 \cdot 7} = \frac{5}{21}$

Como os dois fatores têm sinais diferentes, o produto é um número negativo.

$$\left(-\frac{5}{\cancel{9}_{3}}\right) \cdot \left(+\frac{\cancel{3}^{1}}{7}\right) = -\frac{5}{21}$$

2. Calcular $(-0{,}7) \cdot \left(-\frac{5}{14}\right)$.

Calculamos o produto dos módulos: $0{,}7 \cdot \frac{5}{14} = \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{10}_{2}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{14}_{2}} = \frac{1}{4}$

Como os dois fatores têm o mesmo sinal, o produto é um número positivo.

$$(-0{,}7) \cdot \left(-\frac{5}{14}\right) = \left(-\frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{10}_{2}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{14}_{2}}\right) = +\frac{1}{4}$$

3. Calcular $(+2{,}8) \cdot (-3{,}7)$.

Calculamos o produto dos módulos:

$$\begin{array}{r} 3{,}7 \\ \times\ 2{,}8 \\ \hline 296 \\ 74+ \\ \hline 10{,}36 \end{array}$$

$\longrightarrow$ 1 casa decimal

$\longrightarrow$ 1 casa decimal

$\longrightarrow$ 1 + 1 = 2 casas decimais

Como os dois fatores têm sinais diferentes, o produto é um número negativo.

$(+2{,}8) \cdot (-3{,}7) = -10{,}36$

4. Determinar o valor da expressão $\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot (+2{,}1) - \left(+\frac{5}{9}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$.

$$\left(-\frac{\cancel{3}_{1}}{\cancel{7}}\right) \cdot \left(+\frac{\cancel{21}^{3}}{10}\right) - \left(+\frac{\cancel{5}}{\cancel{9}_{3}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{3}^{1}}{2}\right) =$$

$= \left(-\frac{9}{10}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right) =$ $\longrightarrow$ efetuamos as multiplicações

$= -\frac{9}{10} + \frac{5}{6} =$ $\longrightarrow$ eliminamos os parênteses

$$= -\frac{27}{30} + \frac{25}{30} = \frac{-27+25}{30} = -\frac{2}{30} = -\frac{1}{15}$$

5. Qual é o valor numérico da expressão $2x - 3y$ quando $x = -\frac{3}{4}$ e $y = -\frac{1}{6}$?

$2x - 3y =$

$= 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) =$ ⟶ substituindo as letras pelos valores dados

$= \left(-\frac{6}{4}\right) - \left(-\frac{3}{6}\right) =$

$= -\frac{6}{4} + \frac{3}{6} = -\frac{18}{12} + \frac{6}{12} =$

$= \frac{-18+6}{12} = -\frac{12}{12} = -1$

FIXAÇÃO

1 Vamos calcular:

a) $\left(+\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

b) $(-4) \cdot \left(-\frac{3}{11}\right)$

c) $\left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{3}{4}\right)$

d) $\left(-\frac{5}{8}\right) \cdot (-0,4)$

e) $\left(-\frac{9}{11}\right) \cdot \left(+\frac{22}{27}\right)$

f) $(-6,4) \cdot (+1,5)$

g) $\left(+\frac{5}{9}\right) \cdot \left(+\frac{9}{20}\right)$

h) $(-0,7) \cdot (-2,1)$

2 Calcule:

a) $(-2) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$

b) $\left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \left(+\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$

c) $(-1,5) \cdot \left(+\frac{11}{30}\right) \cdot \left(+\frac{3}{11}\right)$

d) $(+1,2) \cdot (+6) \cdot (+0,65)$

e) $(-0,8) \cdot \left(-\frac{9}{20}\right) \cdot (-0,5)$

f) $(+4) \cdot \left(-\frac{13}{4}\right) \cdot (-0,6) \cdot \left(+\frac{1}{39}\right)$

3 Quanto dá:

a) o dobro de $-\frac{5}{8}$?

b) o triplo de $+0,8$?

c) o quádruplo de $+\frac{7}{6}$?

d) o dobro de $-6,5$?

4 Um mergulhador atingiu uma profundidade de 6,25 m. Um segundo mergulhador atingiu o dobro dessa profundidade. Use um número racional relativo para indicar a profundidade atingida pelo segundo mergulhador.

5 A cada quilômetro rodado, um carro consome 0,12 ℓ de combustível. Quantos litros esse carro vai consumir, se percorrer 82,5 km?

6 Um número racional x é tal que

$x = 2 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) - (-1,6)$. Qual é o número x?

7 Qual é o valor da expressão

$(-5) \cdot (-1,8) - (+7) \cdot (+1,2)$?

8 Dados $x = -\frac{1}{6}$ e $y = +\frac{1}{4}$, qual é o valor de

$5x + 3y$?

9 Vamos calcular o valor de cada uma das expressões numéricas:

a) $\frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) + 2 \cdot \left(+\frac{1}{4}\right)$

b) $7 - 5 \cdot (+1{,}5)$

c) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{3}{10}\right) - \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$

d) $\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{10} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right)$

e) $\frac{5}{8} - \left(+\frac{5}{6}\right) \cdot (+0{,}6)$

10 Determine o valor numérico das expressões:

a) $ax - 2b$, quando $a = -2$, $b = -\frac{3}{4}$ e $x = +\frac{1}{6}$.

b) $ab + ac - bc$, quando $a = -\frac{1}{2}$, $b = +\frac{1}{2}$ e $c = -2$.

11 Sabendo que $x = -1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$ e $y = 1 - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$, calcule o valor de $x \cdot y$.

22 DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Consideremos os números racionais:

$+\frac{3}{5}$ e $+\frac{5}{3}$

Observe: $\left(+\frac{3}{5}\right) \cdot \left(+\frac{5}{3}\right) = +1$

-4 e $-\frac{1}{4}$

Observe: $(-4) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = +1$

$+\frac{1}{3}$ e $+3$

Observe: $\left(+\frac{1}{3}\right) \cdot (+3) = +1$

Verificamos que existem pares de números racionais cujo produto é $+1$.

Assim podemos afirmar que:

> Quando o produto de dois números racionais dá $+1$, um número é o inverso do outro.

Vejamos esses números:

$+\frac{3}{5}$ e $+\frac{5}{3}$, um é o inverso do outro.

-4 e $-\frac{1}{4}$, um é o inverso do outro.

$+\frac{1}{3}$ e $+3$, um é o inverso do outro.

Vamos, agora, tratar da divisão de números racionais.

Exemplos:

1. Calcular $\left(+\frac{2}{9}\right) : \left(-\frac{4}{3}\right)$.

Como os números estão na forma fracionária, essa divisão pode ser representada pela multiplicação do primeiro pelo inverso do segundo.

Assim, temos:

$$\left(+\frac{2}{9}\right) : \left(-\frac{4}{3}\right) = \left(+\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\right) \cdot \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}\right) = -\frac{1}{6}$$

2. Calcular $(-9{,}25) : (-3{,}7)$.

Como os números estão escritos na forma decimal, devemos fazer:

$$(-9{,}25) : (-3{,}7) = (-92{,}5) : (-37) = +2{,}5$$

($\times 10$ em ambos os membros)

D U d	
92, 5	37
1 8 5	2, 5
0 0	U d

3. Calcular $(+1{,}5) : \left(+\frac{3}{5}\right)$.

$$(+1{,}5) : \left(+\frac{3}{5}\right) =$$

$$= \left(+\frac{15}{10}\right) : \left(+\frac{3}{5}\right) =$$

$$= \left(+\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{10}}}\right) \cdot \left(+\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right) = +\frac{5}{2}$$

4. Determinar o valor da expressão $\dfrac{-\frac{7}{8}}{+\frac{21}{2}}$.

Como toda fração representa uma divisão, temos:

$$\frac{-\frac{7}{8}}{+\frac{21}{2}} = \left(-\frac{7}{8}\right) : \left(+\frac{21}{2}\right) = \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}\right) \cdot \left(+\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{21}}}\right) = -\frac{1}{12}$$

5. Determinar o valor da expressão $(-4) \cdot \left(+\frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{2}{7}\right) : \left(+\frac{8}{7}\right)$.

$$= (-4) \cdot \left(+\frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{2}{7}\right) : \left(+\frac{8}{7}\right) =$$

$$= (\overset{1}{\cancel{-4}}) \cdot \left(+\frac{3}{\underset{2}{\cancel{8}}}\right) - \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{7}\right) \cdot \left(+\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}\right) =$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{6}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{-6+1}{4} =$$

$$= -\frac{5}{4}$$

FIXAÇÃO

1 Calcule:

a) $\left(+\frac{6}{7}\right):\left(-\frac{9}{7}\right)$

b) $\left(+\frac{3}{7}\right):\left(+\frac{11}{14}\right)$

c) $\left(-\frac{5}{27}\right):\left(-\frac{10}{9}\right)$

d) $\left(-\frac{5}{8}\right):\left(+\frac{25}{8}\right)$

e) $\left(+\frac{4}{7}\right):(+2)$

f) $(-6):\left(+\frac{12}{5}\right)$

g) $(-9):\left(+\frac{27}{11}\right)$

h) $\left(-\frac{15}{7}\right):(-20)$

i) $\left(+\frac{22}{9}\right):\left(+\frac{11}{3}\right)$

j) $\left(+\frac{30}{7}\right):\left(-\frac{5}{14}\right)$

l) $(-0,3):\left(-\frac{3}{5}\right)$

m) $\left(-\frac{11}{15}\right):(+1,1)$

2 Vamos calcular:

a) $(+2):(-0,5)$

b) $(-2,1):(-2,8)$

c) $(+7,31):(-1,7)$

d) $(-0,18):(+0,36)$

e) $(+0,66):(+1,1)$

f) $(-30,4):(+4)$

g) $(-1,44):(-0,24)$

h) $(+6):(-2,5)$

3 Calcule:

a) $(+2):(-10)$

b) $(-22):(-33)$

c) $(+10):(+25)$

d) $(-30):(+20)$

4 Determine o valor de cada uma das expressões:

a) $\dfrac{-\frac{5}{8}}{+\frac{5}{12}}$

b) $\dfrac{-\frac{11}{9}}{-\frac{11}{6}}$

c) $\dfrac{+\frac{14}{15}}{-\frac{21}{25}}$

5 Dada a expressão $2-(+0,8):(0,5)$, dê o seu valor:

a) na forma fracionária

b) na forma decimal

6 Um número x é tal que $x=(+0,2):(-0,04)-3\cdot(-1,6)$. Qual é o número x?

7 Determine o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas:

a) $\left(-\frac{4}{5}\right):\left(+\frac{8}{5}\right)-(+2):\left(-\frac{5}{4}\right)$

b) $\left(+\frac{8}{5}\right):(-2)-3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$

c) $(-5,6):(-2,8)-(+0,25):(-0,5)$

d) $\frac{4}{9}:(-0,4)-\frac{5}{3}:(-0,5)$

e) $\frac{2}{3}:(-2)+\left(+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{3}{2}\right)$

f) $(-1,44):(+0,48)-(-0,9):(+1,2)$

8 Sabendo que a expressão $\dfrac{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)}{+\frac{4}{9}}$ pode ser escrita na forma $\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)\right]:\left(+\frac{4}{9}\right)$, calcule o valor dessa expressão.

9 Entre quais números inteiros está situado o número racional que representa o valor da expressão

$$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{5}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}}?$$

23 POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Dado um número racional *a* e um número inteiro *n*, com $n > 1$, define-se:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

A expressão a^n chama-se *potência* do número racional *a*.

a^n — expoente; base

Veja os exemplos:

1. $(+7)^2 = (+7) \cdot (+7) = +49$

2. $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

3. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{4}{9}$

4. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

5. $(-0,2)^4 = (-0,2) \cdot (-0,2) \cdot (-0,2) \cdot (-0,2) = +0,0016$

Lembre-se de que:

> Se o expoente é *par*, a potência é sempre um *número positivo*.
> Se o expoente é *ímpar*, a potência tem sempre o *mesmo sinal da base*.

Observações:

- Dado um número racional *a*, define-se que $a^1 = a$. Exemplos:

1. $(+8)^1 = +8$

2. $\left(+\frac{3}{10}\right)^1 = +\frac{3}{10}$

3. $\left(-\frac{5}{9}\right)^1 = -\frac{5}{9}$

4. $(+2,7)^1 = +2,7$

◆◆ Dado um número racional *a*, com $a \neq 0$, define-se que $a^0 = 1$. Exemplos:

$(-5)^0 = 1$ $\qquad \left(+\frac{9}{10}\right)^0 = 1$ $\qquad (-1{,}5)^0 = 1$

Agora observe estes exemplos:

1. Determinar o valor numérico da expressão $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$.

$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 =$

$= \left(+\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\right) \cdot \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) =$ ⟶ efetuando as potenciações

$= \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) =$ ⟶ efetuando a multiplicação

$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$ ⟶ eliminando os parênteses

$= -\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = -\frac{1}{12}$

2. Determinar o valor numérico de $x^3 - x^2 - x$, quando $x = -\frac{1}{2}$.

$x^3 - x^2 - x =$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) =$ ⟶ substituindo a letra pelo valor dado

$= \left(-\frac{1}{8}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$

$= -\frac{1}{8} - \frac{2}{8} + \frac{4}{8} =$

$= +\frac{1}{8}$

Propriedades

São válidas para o conjunto ℚ as seguintes propriedades:

❖ Multiplicação de potências de mesma base.

$\left(-\frac{3}{7}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^5 = \left(-\frac{3}{7}\right)^{3+5} = \left(-\frac{3}{7}\right)^8$

❖ Divisão de potências de mesma base.

$$\left(+\frac{7}{5}\right)^9 : \left(+\frac{7}{5}\right)^7 = \left(+\frac{7}{5}\right)^{9-7} = \left(+\frac{7}{5}\right)^2$$

❖ Potência de uma potência.

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^5 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2\cdot 5} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{10}$$

Expoente inteiro negativo

Vamos considerar os seguintes quocientes:

$10^2 : 10^3$ e $10^3 : 10^5$

Ambos representam quocientes de potências de mesma base, com o expoente do dividendo menor que o expoente do divisor.

Observe, agora:

Se aplicarmos a propriedade das potências, teremos:

$$10^2 : 10^3 = 10^{2-3} = 10^{-1}$$

Se considerarmos o quociente na forma de uma fração, teremos:

$$10^2 : 10^3 = \frac{10^2}{10^3} = \frac{\cancel{10}\cdot\cancel{10}}{\cancel{10}\cdot\cancel{10}\cdot 10} = \frac{1}{10}$$

Se compararmos os resultados, temos que $10^{-1} = \frac{1}{10}$, ou seja:

> Para todo número racional *a*, com $a \neq 0$, temos que $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Veja os exemplos:

1. $2^{-1} = \frac{1}{2}$

2. $(-9)^{-1} = \frac{1}{-9} = -\frac{1}{9}$

3. $\left(+\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{+\frac{2}{5}} = +\frac{5}{2}$

4. $\left(-\frac{7}{10}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{7}{10}} = -\frac{10}{7}$

Se aplicarmos a propriedade das potências, teremos:

$$10^3 : 10^5 = 10^{3-5} = 10^{-2}$$

Se considerarmos o quociente na forma de uma fração, teremos:

$$10^3 : 10^5 = \frac{10^3}{10^5} = \frac{\cancel{10}\cdot\cancel{10}\cdot\cancel{10}}{\cancel{10}\cdot\cancel{10}\cdot\cancel{10}\cdot 10\cdot 10} = \frac{1}{10^2}$$

Se compararmos os resultados, temos que $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$, ou seja:

> Para todo número racional *a*, com $a \neq 0$, temos que $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Veja os exemplos:

5. $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

6. $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64}$

7. $\left(+\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(+\frac{2}{5}\right)^2} = \left(+\frac{5}{2}\right)^2 = +\frac{25}{4}$

Pelos exemplos dados, notamos que uma maneira prática de escrever uma potência com expoente inteiro negativo é escrever o inverso da base e mudar o sinal do expoente.
Veja:

$(-4)^{-3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^3$ $\qquad$ $\left(+\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(+\frac{5}{2}\right)^2$

FIXAÇÃO

1 Escreva na forma de potência os seguintes produtos:

a) $\left(+\frac{9}{10}\right) \cdot \left(+\frac{9}{10}\right) \cdot \left(+\frac{9}{10}\right)$

b) $(-2{,}4) \cdot (-2{,}4) \cdot (-2{,}4) \cdot (-2{,}4) \cdot (-2{,}4)$

c) $\left(-\frac{11}{8}\right) \cdot \left(-\frac{11}{8}\right)$

d) $(+0{,}05) \cdot (+0{,}05) \cdot (+0{,}05)$

2 Indique e calcule:

a) o quadrado do número $-\frac{5}{7}$

b) o cubo do número $+0{,}8$

c) a quarta potência de $-\frac{1}{2}$

d) o quadrado de $-2{,}5$

3 Calcule:

a) $\left(-\frac{1}{9}\right)^2$

b) $\left(+\frac{1}{4}\right)^2$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

d) $(-0{,}7)^3$

e) $\left(-\frac{4}{11}\right)^0$

f) $(+0{,}9)^3$

g) $\left(+\frac{7}{3}\right)^1$

h) $(-4{,}2)^2$

i) $\left(-\frac{7}{5}\right)^2$

j) $(+6{,}2)^0$

l) $\left(+\frac{6}{5}\right)^2$

m) $\left(-\frac{3}{10}\right)^2$

4 Sendo $x = \left(-\frac{1}{2}\right) : (+2)$, calcule:

a) o quadrado do número x

b) o cubo do número x

5 Determine o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas:

a) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 : \left(-\frac{9}{8}\right)$

b) $\left(-\frac{7}{9}\right) : \left(-\frac{7}{6}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right)^2$

c) $3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (-12) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2$

d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot (-10) - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 : \left(+\frac{4}{9}\right)$

e) $\left(-\frac{4}{3}\right)^2 : \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(-\frac{7}{25}\right) \cdot (+5)^2$

6 Sabendo-se que $a = -2$ e $b = -\frac{1}{2}$, determine o valor numérico de:

a) $a^3 - b^3$

b) $a^3 - b^2$

c) $a^2 - ab + b^2$

7 Considere o número

$x = \left(-\frac{1}{4}\right) : (-2)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 : (-2)$. Qual é o valor do número x?

8 Qual é o valor da expressão numérica $(+0,8) : (-0,2)^2 + (-2,7) : (-0,3)^2$?

9 Usando as propriedades de potências de mesma base, transforme numa só potência as seguintes expressões:

a) $\left(-\frac{7}{4}\right)^6 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right)^4$

b) $(+7,5)^{11} : (+7,5)^8$

c) $\left(+\frac{2}{5}\right)^9 \cdot \left(+\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(+\frac{2}{5}\right)^6$

d) $[(-4,7)^5]^2$

e) $(-0,02)^7 \cdot (-0,02)^3 \cdot (-0,02)$

f) $\left[\left(-\frac{3}{8}\right)^4\right]^{-5}$

10 Vamos calcular:

a) 3^{-2}

b) 10^{-3}

c) 8^{-2}

d) $(-4)^{-3}$

e) $(-10)^{-2}$

f) $(-9)^{-1}$

g) $\left(+\frac{2}{5}\right)^{-1}$

h) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$

i) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$

j) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}$

11 Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas:

a) $\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-3}$

b) $\left(\frac{5}{3} - 1\right)^{-4}$

c) $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^{-2}$

d) $\left(2 - \frac{4}{5}\right)^{-1}$

12 Calcule as potências e dê as respostas na forma decimal:

a) $\left(+\frac{5}{6}\right)^{-2}$

b) 10^{-4}

c) 2^{-3}

d) $(-4)^{-1}$

13 Escreva na forma de potência com expoente inteiro negativo:

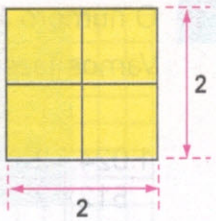
a) 0,01 b) 0,00001 c) 0,001

14 Determine o valor da expressão numérica $\frac{2^{-3}}{4^{-2}}$.

24 RAIZ QUADRADA EXATA DE NÚMEROS RACIONAIS

Se um número representa um produto de dois fatores iguais, então cada fator é chamado *raiz quadrada exata do número.*

Vejamos alguns exemplos:



1. 4 representa o produto $2 \cdot 2$ ou 2^2.

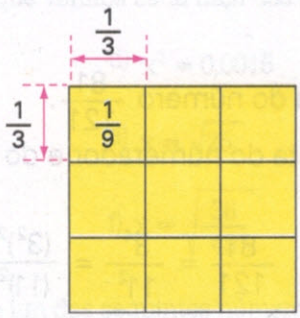
   Logo, 2 é a raiz quadrada de 4. Indica-se $\sqrt{4} = 2$.

   Geometricamente, a raiz quadrada exata de um número é expressa pela medida do lado de um quadrado cuja área é igual ao referido número.

2. $\frac{1}{9}$ representa o produto $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ ou $\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

   Logo, $\frac{1}{3}$ é a raiz quadrada de $\frac{1}{9}$. Indica-se $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.

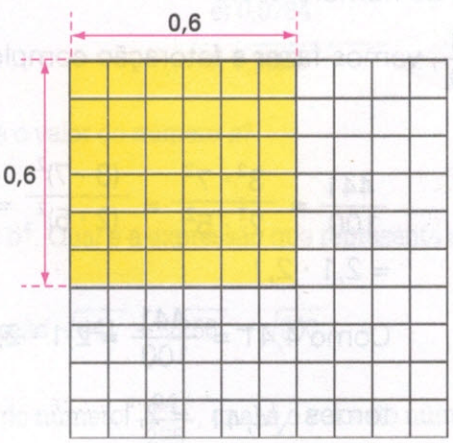
   Geometricamente, temos:



3. 0,36 representa o produto $0,6 \cdot 0,6$ ou $(0,6)^2$.

   Logo, 0,6 é a raiz quadrada de 0,36. Indica-se $\sqrt{0,36} = 0,6$.

   Geometricamente, temos:



Pelos exemplos dados, notamos que todo número quadrado perfeito tem uma raiz quadrada exata, sendo bastante simples determinar a raiz quadrada exata de números como 4, $\frac{1}{9}$ e 0,36.

Estudaremos, agora, como determinar a raiz quadrada exata de outros números que também são quadrados.

Vamos analisar algumas situações:

1ª O número 1 024 é quadrado perfeito. Determine sua raiz quadrada exata.

Vamos fazer a fatoração completa do número 1 024.

1 024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$1\,024 = 2^{10}$

Como 2^{10} pode ser escrito na forma $(2^5)^2$, temos:

$1\,024 = 2^{10} = (2^5)^2 = (32)^2 = 32 \cdot 32$

Como $1\,024 = 32 \cdot 32$, temos, pela definição:

$\sqrt{1024} = 32$

2ª Determine a raiz quadrada exata do número $\frac{81}{121}$.

Vamos fazer a fatoração completa do numerador e do denominador:

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

121	11
11	11
1	

$$\frac{81}{121} = \frac{3^4}{11^2} = \frac{(3^2)^2}{(11)^2} = \frac{(9)^2}{(11)^2} = \left(\frac{9}{11}\right)^2 = \frac{9}{11} \cdot \frac{9}{11}$$

Como $\frac{81}{121} = \frac{9}{11} \cdot \frac{9}{11}$, temos, pela definição,

$\sqrt{\frac{81}{121}} = \frac{9}{11}$.

3ª Qual é a raiz quadrada exata do número 4,41?

Lembrando que $4{,}41 = \frac{441}{100}$, vamos fazer a fatoração completa do numerador e do denominador.

441	3
147	3
49	7
7	7
1	

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$$\frac{441}{100} = \frac{3^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{(3 \cdot 7)^2}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{(21)^2}{(10)^2} = \left(\frac{21}{10}\right)^2 = (2{,}1)^2 =$$

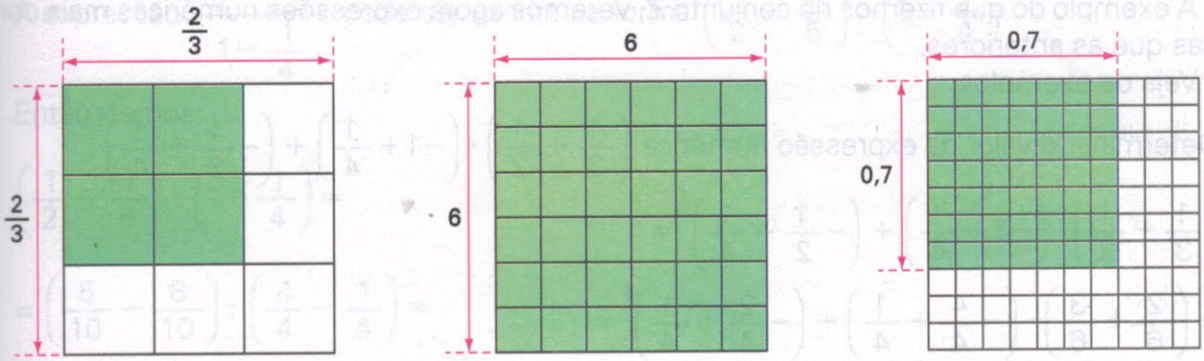
$= 2{,}1 \cdot 2{,}1$

Como $4{,}41 = \frac{441}{100} = 2{,}1 \cdot 2{,}1$, pela definição

temos $\sqrt{4{,}41} = 2{,}1$.

FIXAÇÃO

1 Observe as seguintes figuras:



Por meio dessas figuras descubra, geometricamente, o valor de:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{0,49}$ c) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

2 Substitua a letra x pelo número racional que verifica cada uma das seguintes igualdades:

a) $x^2 = 100$

b) $x^2 = 1,21$

c) $x^2 = \frac{1}{16}$

d) $x^2 = 0,0016$

e) $x = \sqrt{25}$

f) $x = \sqrt{\frac{36}{49}}$

3 Determine a raiz quadrada exata de cada um dos seguintes números:

a) 2 304

b) 676

c) 1 764

d) 2 500

4 Qual é a raiz quadrada exata de cada um dos seguintes números?

a) 12,25

b) 12,96

c) 30,25

d) 29,16

e) 0,0784

f) 0,1024

5 Sabe-se que $a = \sqrt{\frac{121}{196}}$. Qual é o valor do número a?

6 Um número é expresso por $a^{10} \cdot b^4$. Qual é a expressão que representa a raiz quadrada desse número?

7 Vamos calcular o valor da expressão $\sqrt{441} + \sqrt{256} - \sqrt{900}$.

8 Se x representa a raiz quadrada do número $\frac{64}{225}$, qual é o valor do número x?

25 EXPRESSÕES NUMÉRICAS

A exemplo do que fizemos no conjunto $\mathbb{Z}$, veremos agora expressões numéricas mais complexas que as anteriores.

Veja os exemplos:

1. Determinar o valor da expressão numérica $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-1+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2$.

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-1+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)\cdot\left(-\frac{4}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)^2=$$

$$=\left(+\frac{5}{\cancel{6}}\right)\cdot\left(-\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)^2=$$

$$=\left(-\frac{5}{8}\right)+\left(+\frac{1}{16}\right)=$$

$$=-\frac{5}{8}+\frac{1}{16}=$$

$$=-\frac{10}{16}+\frac{1}{16}=-\frac{9}{16}$$

2. Qual é o valor da expressão numérica $\frac{1}{2}-\left[(-1)^2-6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]$?

$$\frac{1}{2}-\left[(-1)^2-6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}-\left[(+1)-\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\left(+\frac{4}{\cancel{9}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}-\left[(+1)-\left(+\frac{8}{3}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}-\left[+1-\frac{8}{3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}-\left[+\frac{3}{3}-\frac{8}{3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}-\left[-\frac{5}{3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=$$

$$=\frac{3}{6}+\frac{10}{6}=+\frac{13}{6}$$

3. Vamos calcular o valor de $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{4}}$.

A expressão $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{4}}$ pode ser escrita na forma $\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\right):\left(1-\frac{1}{4}\right)$.

Então, temos:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\right):\left(1-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\left(\frac{5}{10}-\frac{8}{10}\right):\left(\frac{4}{4}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\left(-\frac{3}{10}\right):\left(+\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\left(-\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{5}{\cancel{10}}}\right):\left(+\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right)=$$

$$=-\frac{2}{5}$$

FIXAÇÃO

Determine o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas:

a) $-1+\left(\frac{5}{6}-2\right):\left(2-\frac{1}{4}\right)$

b) $\left(1+\frac{3}{5}\right):\left(3-\frac{3}{5}\right)-\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)$

c) $\left(1-\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}-1\right)^4-\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2$

d) $\left[\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{4}{3}\right)\right]^2:\left(+\frac{2}{3}\right)$

e) $\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{3}{4}}{(-1)^2+\frac{1}{6}}$

f) $\dfrac{\left(1-\frac{11}{8}\right):\frac{9}{8}}{(-3+5)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}$

g) $\left(-1-\frac{1}{2}\right)-\left[1+2:\left(-1+\frac{1}{2}\right)\right]$

h) $\left[\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\sqrt{\frac{49}{25}}+\left(-\frac{1}{2}\right)^4\cdot\sqrt{16}\right]:\left(-\frac{1}{4}+1\right)$

i) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{3}{7}\cdot\left[\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]$

26 ESTUDO DAS MÉDIAS

Média aritmética e média aritmética ponderada

Consideremos a seguinte situação:

As notas de um aluno, em Matemática, no 2º bimestre foram:

1ª prova	Trabalho de pesquisa	2ª prova
5,0	8,0	5,0

Nessas condições, qual seria a média do aluno no bimestre?

Para responder a esta questão, devemos considerar dois casos:

◆ O professor não atribui pesos diferentes para as notas.

Neste caso, pode-se calcular a média do aluno adicionando-se as três notas e dividindo-se o resultado por 3, ou seja:

$$\frac{5,0 + 8,0 + 5,0}{3} = \frac{18,0}{3} = 6,0$$

A média do aluno é 6,0.

Dizemos que o valor 6,0 é a *média aritmética* dos números 5,0; 8,0 e 5,0.

A *média aritmética* de *n* números representa a soma de todos os números dividida por *n*.

◆◆ O professor atribui pesos diferentes para cada nota:

1ª prova	Trabalho de pesquisa	2ª prova
5,0 (peso 3)	8,0 (peso 2)	5,0 (peso 5)

Neste caso, a média do aluno é calculada assim:

$$\frac{3 \cdot 5,0 + 2 \cdot 8,0 + 5 \cdot 5,0}{3 + 2 + 5} = \frac{15,0 + 16,0 + 25,0}{10} = \frac{56,0}{10} = 5,6$$

A média do aluno é, então, 5,6.

Dizemos que o valor 5,6 é a *média ponderada* dos números 5,0; 8,0 e 5,0, aos quais atribuímos os pesos 3, 2 e 5, respectivamente.

Pelos dois casos dados, observamos que uma média depende das regras estabelecidas para seu cálculo.

Vejamos, agora, estes exemplos:

1. Em um elevador havia cinco pessoas. Essas pessoas pesavam, respectivamente, 76 kg, 83 kg, 57 kg, 60 kg e 54 kg. Qual o peso médio das pessoas que estavam no elevador?

$$\frac{76 + 83 + 57 + 60 + 54}{5} = \frac{330}{5} = 66$$

O peso médio das pessoas que estavam no elevador é 66 kg.

2. Solange comprou 7 cadernos por 4 reais cada um e 3 cadernos por 7 reais cada um. Qual o preço médio dos cadernos que ela comprou?

Neste caso, devemos calcular a média aritmética ponderada, ou seja:

$$\frac{7 \cdot 4 + 3 \cdot 7}{7 + 3} = \frac{28 + 21}{10} = \frac{49}{10} = 4{,}9$$

O preço médio dos cadernos foi de R$ 4,90.

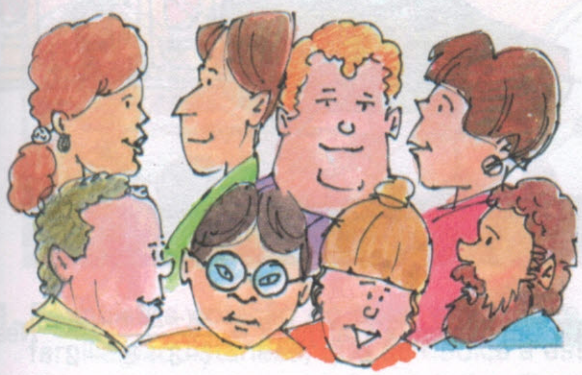
FIXAÇÃO

1 Determine a média aritmética de −25, −22, −13, 15 e 30.

2 Qual é a média aritmética ponderada de 8, 15 e 20, com pesos 2, 2 e 1, respectivamente?

3 Cristina comprou 3 canetas por 21 reais cada uma e 2 canetas por 12 reais cada uma. Quanto ela pagou, em média, por caneta?

4 Tenho 8 professores e suas idades são: 26 anos, 28 anos, 34 anos, 40 anos, 28 anos, 30 anos, 36 anos e 32 anos. Qual é a idade média dos meus professores?



5 Qual é a média aritmética de $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{4}$?

6 Os jogadores de basquete de um clube têm, respectivamente, 1,90 m; 1,99 m; 2,01 m; 2,08 m e 2,12 m. Qual é a altura média dos jogadores desse clube?

7 Para preparar um refresco, usam-se 8 copos de água mineral, que custa 50 centavos de reais o copo, e 2 copos de groselha, que custa 85 centavos o copo. Qual é o custo de cada copo de refresco?

8 Em um torneio hexagonal, um clube disputou 5 jogos. Os resultados foram os seguintes:

4 × 2; 3 × 3; 2 × 3; 4 × 0 e 1 × 1

a) Quantos gols o clube marcou nesse hexagonal?

b) Quantos gols o clube sofreu nesse torneio?

c) Qual a média de gols que o clube marcou?

d) Qual a média de gols que o clube sofreu?

9 Uma equipe de voleibol tem 6 jogadores titulares e 6 jogadores reservas. Três desses jogadores têm 20 anos, dois jogadores têm 26 anos, dois jogadores têm 23 anos e os demais têm 21 anos, 24 anos, 25 anos, 27 anos e 30 anos. Qual é a idade média dos jogadores dessa equipe?

10 O professor de Matemática estabeleceu o seguinte critério para a média do bimestre: peso 4 para a prova, peso 3 para a pesquisa, peso 2 para as lições feitas e peso 1 para a participação em aula. Um aluno obteve 6,0 na prova; 8,0 na pesquisa; 7,5 nas lições e 9,0 de participação. Qual foi a média desse aluno no bimestre?

11 Uma indústria produz um certo produto. Vendeu 3 500 unidades desse produto por 30 reais cada uma e 8 500 unidades por 24 reais cada uma. Qual foi o preço médio desse produto, por unidade?

RETOMANDO o que aprendeu

1 Considere as igualdades:

a) $(-10)^0 = 1$ b) $10^{-1} = 0{,}1$ c) $\frac{1}{10} = 10^{-1}$

Quantas são verdadeiras?

2 Qual é o valor da expressão $\frac{0{,}1 - 0{,}01}{0{,}2 - 0{,}02}$?

3 Qual é o número decimal expresso por

$$\frac{1}{4} + 0{,}19 : \left(4 - 0{,}8 : 0{,}5 - \frac{1}{2}\right)?$$

4 Se $x = 2^{-1}$ e $y = 2^{-2}$, quanto vale $x + y$?

5 Entre quais números inteiros se situa o resultado da multiplicação $\left(-1 + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(-1 - \frac{3}{2}\right)$?

6 A distribuição dos alunos da 7ª série, por idade, está no quadro abaixo. Nessas condições, qual a média das idades dos alunos dessa série?

Nº de alunos	Idade
2	12
18	13
5	14

7 Qual é o número racional relativo expresso por $(+0{,}5)^3 - \sqrt{0{,}25} + 0{,}25$?

8 Se um número x é expresso por $(-1 - 1) \cdot \left(-2 + \frac{5}{4}\right) - \frac{1}{2}$, responda:

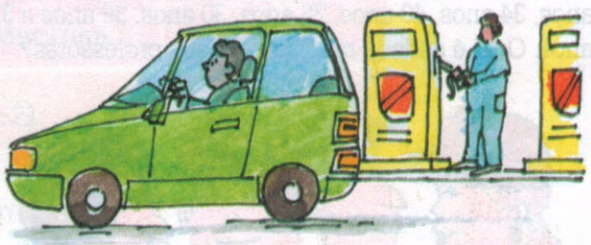
a) Qual é o cubo desse número?
b) A raiz quadrada exata do número x existe no conjunto $\mathbb{Q}$?
c) Em caso afirmativo, qual é o valor dessa raiz?

9 Calcule o valor da expressão numérica

$$\left[-2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2\right] : \left(-\frac{1}{2}\right)^3.$$

10 Qual é a distância na vertical de um ponto situado a −4,25 m do nível do mar até um ponto situado a −0,5 m do nível do mar?

11 O tanque de um automóvel está com 60 litros de combustível. Se esse automóvel gasta 0,15 ℓ a cada quilômetro rodado, quantos quilômetros ele pode rodar sem ser abastecido?



12 Qual é o número racional expresso por $\frac{6^{-2}}{4^{-1}}$?

13 Um número x é tal que $x = \frac{-(-2)^2 - \sqrt{9}}{(-3 + 5)^0 - 2}$. Nessas condições, qual é o valor de x^{-1}?

JORNAIS & REVISTAS

O artigo "Terror do goleiro", de Maurício Cardoso, publicado na revista *Veja* de 5/11/97, trata da fabricação de bolas de futebol. As bolas são feitas de modo artesanal, um trabalho que requer muita paciência e precisão.

Aqui está um trecho desse artigo:

> No Brasil, a tarefa é desempenhada por presos em penitenciárias. A Penalty tem convênio com catorze presídios do interior do Estado de São Paulo, que lhe fornecem a mão-de-obra. Um preso costura até quatro bolas por dia, trabalho que lhe rende, em média, 120 reais por mês.
>
> A exploração de mão-de-obra barata é usada em fábricas do mundo inteiro. O maior produtor de bolas do mundo é o Paquistão. Lá, as indústrias pagam 1,20 dólar por bola costurada, o que dá, em média, 96 dólares de renda mensal para as famílias que recebem a encomenda. No Vietnã, potência emergente no negócio, o costureiro de bola ganha apenas 32 dólares por mês para fazer o mesmo serviço.

1. Pesquise a cotação do dólar em reais e depois calcule a média da renda mensal, de uma família paquistanesa, que se dedica a essa atividade?
2. Quantas bolas, em média, cada família paquistanesa costura por mês?
3. Qual é a renda anual, em dólares, de uma família paquistanesa que costura 105 bolas por mês?

4

Estudando as equações

A primeira referência a equações de que se tem notícia consta do papiro de *Rhind*, um dos documentos egípcios mais antigos que tratam de Matemática.

Como os egípcios não utilizavam a notação algébrica, os métodos de solução de uma equação eram complexos e cansativos.

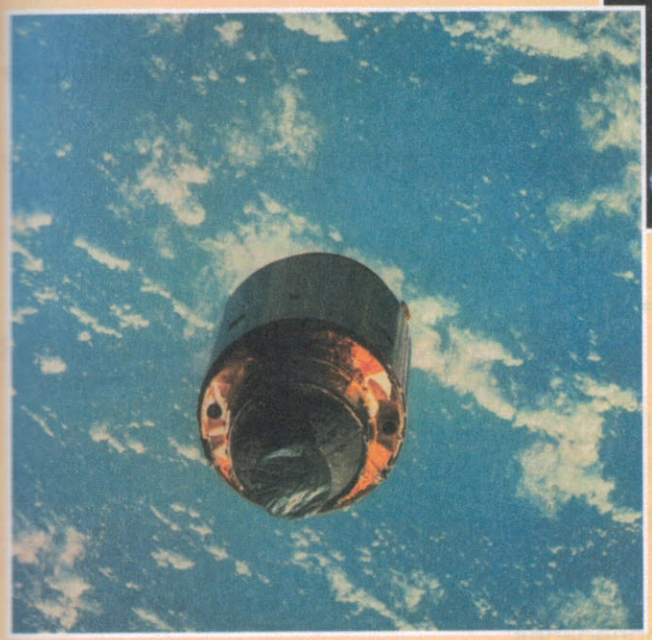
Os gregos resolviam equações através da Geometria.

Na obra *Os Elementos*, de Euclides, encontramos soluções geométricas do 2º grau cujo estudo faremos na 8ª série.

Mas foram os árabes que, cultivando a Matemática dos gregos, promoveram um acentuado progresso na resolução de equações. No trabalho dos árabes, destaca-se o de Al-Khowarizmi (século IX), que resolveu e discutiu equações de vários tipos.

Al-Khowarizmi é considerado o matemático árabe de maior expressão do século IX. Ele escreveu dois livros que desempenharam importante papel na história da Matemática. Num deles, *Sobre a arte hindu de calcular*, Al-Khowarizmi faz uma exposição completa dos numerais hindus. O outro, considerado o seu livro mais importante, *Al-jabr wa'l mugãbalah*, contém uma exposição clara e sistemática sobre resolução de equações. Por esse motivo, Al-Khowarizmi é chamado "pai da Álgebra".

Atualmente as equações são usadas, entre outras coisas, para determinar o lucro de uma firma, para calcular a taxa de uma aplicação financeira, para fazer a previsão do tempo etc.



Resolver equações estimula o raciocínio e ajuda a encontrar solução para problemas complexos.

Você vai, a partir de agora, resolver equações simples. Mais tarde, poderá até usar computadores para resolver equações mais complexas.

27 IGUALDADE

Comumente usam-se sentenças, seja no decorrer de uma conversa, seja na linguagem escrita.

Em Matemática, também usamos sentenças, a maioria das quais fazendo afirmações sobre números. Nas sentenças matemáticas, os verbos são normalmente representados pelos símbolos = (*é igual a*), ≠ (é diferente de), > (é maior que) e < (é menor que).

Uma sentença matemática onde se use o símbolo = representa uma *igualdade*.

Exemplos:

1. $2 + 5 = 7$ ⟶ a soma de dois e cinco *é igual a* sete
2. $2^3 - 5 = 3$ ⟶ o cubo de dois diminuído de cinco *é igual a* três
3. $3^2 + 4^2 = 5^2$ ⟶ a soma dos quadrados de três e de quatro *é igual ao* quadrado de cinco

De um modo geral, podemos representar uma igualdade por a = b, onde *a* e *b* são nomes diferentes para um mesmo número.

$\underbrace{2 + 5}_{a} = \underbrace{7}_{b}$ $\qquad$ $\underbrace{2^3 - 5}_{a} = \underbrace{3}_{b}$ $\qquad$ $\underbrace{3^2 + 4^2}_{a} = \underbrace{5^2}_{b}$

Em uma igualdade:

✓ A expressão matemática situada *à esquerda* do símbolo = é denominada *1º membro da igualdade.*

✓ A expressão matemática situada *à direita* do símbolo = é denominada *2º membro da igualdade.*

Assim:

$\underbrace{2 + 5}_{\text{1º membro}} = \underbrace{7}_{\text{2º membro}}$ $\qquad$ $\underbrace{2^3 - 5}_{\text{1º membro}} = \underbrace{3}_{\text{2º membro}}$ $\qquad$ $\underbrace{3^2 + 4^2}_{\text{1º membro}} = \underbrace{5^2}_{\text{2º membro}}$

Propriedades da igualdade

Uma igualdade apresenta as seguintes propriedades:

Propriedade reflexiva

$2 = 2$

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ } a = a, para qualquer número racional *a*

Propriedade simétrica

$2 + 5 = 7 \Rightarrow 7 = 2 + 5$
$2^3 - 5 = 3 \Rightarrow 3 = 2^3 - 5$
$3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + 4^2$

$a = b \Rightarrow b = a$, para quaisquer a e b

Propriedade transitiva

$2 + 5 = 7$ e $7 = 8 - 1 \Rightarrow 2 + 5 = 8 - 1$
$2^3 - 5 = 3$ e $3 = 2 + 2^0 \Rightarrow 2^3 - 5 = 2 + 2^0$
$3^2 + 4^2 = 5^2$ e $5^2 = 25 \Rightarrow 3^2 + 4^2 = 25$

$a = b$ e $b = c \Rightarrow a = c$, para quaisquer a, b e c

Princípios de equivalência

Vamos conhecer os princípios de equivalência de uma igualdade, que serão muito úteis na resolução de equações.

Princípio aditivo

Adicionando um mesmo número aos dois membros de uma igualdade, obtemos uma nova igualdade, ou seja:

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c$$

$5 + 3 = 8 \Rightarrow \underbrace{(5 + 3) + 2}_{10} = \underbrace{(8) + 2}_{10}$ ⟶ adicionamos +2 aos dois membros

$5 + 3 = 8 \Rightarrow \underbrace{(5 + 3) - 2}_{6} = \underbrace{(8) - 2}_{6}$ ⟶ adicionamos −2 aos dois membros

Princípio multiplicativo

Multiplicando os dois membros de uma igualdade por um mesmo número, diferente de zero, obtemos uma nova igualdade, ou seja:

$$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c, \text{ com } c \neq 0$$

$5 + 3 = 8 \Rightarrow \underbrace{(5 + 3) \cdot 2}_{16} = \underbrace{(8) \cdot 2}_{16}$ ⟶ multiplicamos os dois membros por 2

$5 + 3 = 8 \Rightarrow \underbrace{(5 + 3) \cdot \frac{1}{2}}_{4} = \underbrace{(8) \cdot \frac{1}{2}}_{4}$ ⟶ multiplicamos os dois membros por $\frac{1}{2}$

FIXAÇÃO

1 Em cada uma das seguintes igualdades, identifique o 1º membro e o 2º membro:

a) $5^2 + 2 = 7 \cdot 4 - 1$

b) $13^2 - 12^2 = 5^2$

c) $10 \cdot 2^2 = 2^3 + 2^5$

d) $2^3 \cdot 2^7 = 2^9 \cdot 2$

2 O professor de Matemática pediu a você que escrevesse a igualdade $10 = 5x$ de outra forma. Você, acertadamente, escreveu $5x = 10$. Qual a propriedade que você aplicou para fazer isso?

3 Na lousa está escrito: $a = b$ e $b = -7$. Partindo dessas igualdades, você é capaz de dar o valor de *a*? Qual a propriedade que você usou para dar a resposta?

4 Na hora de copiar a expressão $-1 = x + 1$, você aplicou uma propriedade da igualdade e escreveu $x + 1 = -1$. Você acertou? Em caso afirmativo, qual a propriedade que você usou?

5 Observe as igualdades $x = 3y$ e $3y = z - 2$. Partindo dessas duas igualdades, você é capaz de escrever uma nova igualdade? Em caso afirmativo, qual é essa nova igualdade e qual a propriedade que justifica a sua resposta?

6 Observe a igualdade: $7x = 21$. Se você multiplicar o primeiro membro por $\frac{1}{7}$, como deverá escrever o 2º membro para obter uma nova igualdade?

7 Se você partir da igualdade $x + 6 = 8$ e adicionar -6 ao primeiro membro, como deverá escrever o 2º membro, para que continue existindo uma igualdade?

8 Qual é o princípio de equivalência que, partindo da igualdade $3x = 2$, lhe permite escrever a nova igualdade $3 \cdot (3x) = 3 \cdot 2$?

9 Se você adicionar o número -2 aos dois membros de cada uma das seguintes igualdades, você será capaz de descobrir o valor que a letra *x* pode assumir em cada uma delas. Faça isso e descubra o valor de *x*.

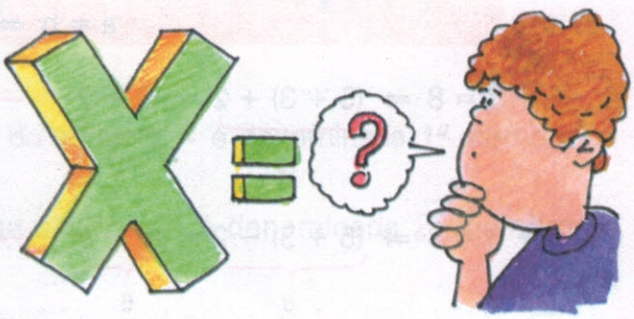
a) $x + 2 = 6$

b) $x + 2 = -1$

10 Se você multiplicar os dois membros de cada uma das seguintes igualdades pelo número $\frac{1}{3}$, você será capaz de descobrir o valor que a letra *x* pode assumir em cada uma delas. Faça isso, use os conhecimentos já adquiridos e descubra o valor de *x*.

a) $3x = 21$

b) $3x = -15$



28 EQUAÇÕES

O que é uma equação?

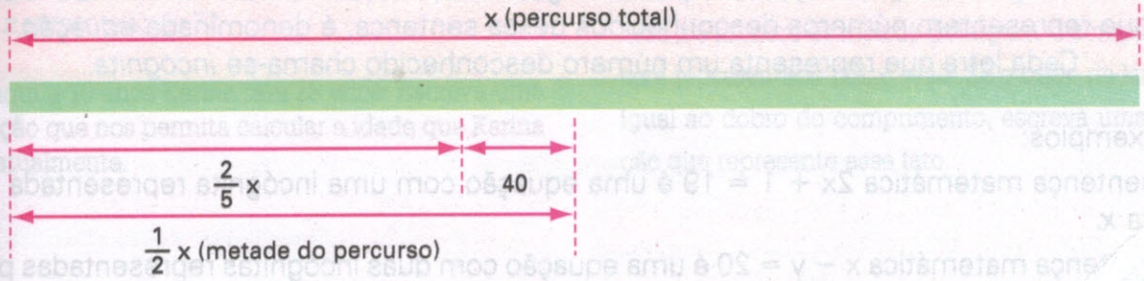
Quando vamos resolver um problema para encontrar o valor de um ou mais números desconhecidos, a transformação da sentença na forma discursiva, com palavras, numa sentença em linguagem matemática, com letras e símbolos, é a parte mais importante do trabalho.

Durante muito tempo, as situações-problema foram resolvidas com o uso de palavras e desenhos. O uso de letras para representar os números desconhecidos trouxe enormes progressos para a Matemática, facilitando a resolução dos problemas.

É o que veremos nas situações a seguir.

1ª Em uma prova do campeonato mundial de Fórmula 1, um corredor desistiu da competição ao completar $\frac{2}{5}$ do percurso total, por defeitos mecânicos em seu carro. Se tivesse corrido mais 40 km, teria cumprido a metade do percurso total. Qual é o percurso total dessa prova?
Devemos encontrar um certo número que represente, em quilômetros, o percurso total da prova. Vamos indicar esse número pela letra *x*.

Podemos fazer um esboço gráfico do problema:



Pelo esboço gráfico, podemos escrever a sentença matemática:

$$\frac{2}{5}x + 40 = \frac{1}{2}x$$

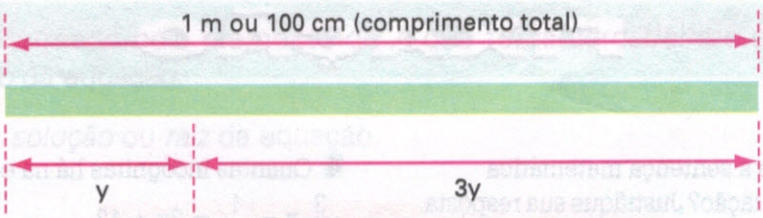
$\frac{2}{5}$ do percurso total

40 km

metade do percurso total

Note que formamos uma sentença matemática representada por uma igualdade, em que usamos a letra *x* para nos referir a um número desconhecido dessa sentença.

2ª Um carpinteiro serra uma tábua de 1 m (ou 100 cm) em dois pedaços. Um dos pedaços tem um comprimento igual ao triplo do outro. Calcular os comprimentos dos dois pedaços.
Devemos encontrar dois números que representem, em centímetros, os comprimentos dos pedaços em que a tábua foi serrada. Como um dos pedaços tem o triplo do outro, vamos indicar o comprimento do menor pedaço pela letra *y* e o comprimento do maior pedaço por 3y (*triplo* significa *três vezes*).
Podemos fazer um esboço gráfico usando a letra *y*:



Pelo esboço gráfico, podemos escrever a sentença matemática:

$$y + 3y = 100$$

comprimento do pedaço menor

comprimento do pedaço maior

comprimento total

Note que formamos uma sentença matemática representada por uma igualdade, em que usamos a letra *y* para representar o número desconhecido desse sentença.

As sentenças matemáticas que escrevemos nas duas situações, $\frac{2}{5}x + 40 = \frac{1}{2}x$ e $y + 3y = 100$, são chamadas *equações*.

Assim:

> Toda sentença matemática expressa por uma igualdade, na qual exista uma ou mais letras que representem números desconhecidos dessa sentença, é denominada *equação*.
> Cada letra que representa um número desconhecido chama-se *incógnita*.

Exemplos:

1. A sentença matemática $2x + 1 = 19$ é uma equação com uma incógnita representada pela letra *x*.
2. A sentença matemática $x - y = 20$ é uma equação com duas incógnitas representadas pelas letras *x* e *y*.
3. A sentença $5m + 2 = 2m - 19$ é uma equação com uma incógnita representada pela letra *m*.

Como toda equação é uma igualdade, temos:

$\underbrace{\frac{2}{5}x + 40}_{\text{1º membro}} = \underbrace{\frac{1}{2}x}_{\text{2º membro}}$

$\underbrace{y + 3y}_{\text{1º membro}} = \underbrace{100}_{\text{2º membro}}$

Observação:

Não são equações as sentenças matemáticas:

✓ $3^2 + 1 = 2 + 2^3$ ⟶ embora seja uma igualdade, não apresenta elemento desconhecido

✓ $x + 3 < 20$ ⟶ embora apresente elemento desconhecido, não representa uma igualdade

FIXAÇÃO

1 Você pode dizer que a sentença matemática $3x + 15 = 81$ é uma equação? Justifique sua resposta.

2 Dentre as sentenças matemáticas $x + 1 = 0$, $x - 1 > 0$, $x - 1 \neq 0$, $x - 1 = 0$, $x + 1 < 0$ e $x = -1$, quais são equações?

3 Por que a sentença matemática $2^5 + 2^3 = 2^2 \cdot 10$ não é uma equação?

4 Quantas incógnitas há na equação $\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = 2x + 1$?

5 A sentença matemática $3x = 10 - 2y$ é uma equação. Quantas incógnitas há nessa equação?

6 Dada a equação $7y - 2 = 5y + 12$, qual é o primeiro membro dessa equação?

7 Escreva a equação correspondente a cada uma das seguintes situações:

a) Um número x aumentado de 31 é igual a 100.

b) Subtraindo 8 de um número x obtemos 41.

c) O dobro do número x aumentado de 31 é igual a 73.

d) O triplo do número x diminuído de 13 dá 47.

e) A metade do número x somada com a terça parte do mesmo número x é igual a 35.

f) O quádruplo do número x é igual ao próprio número x aumentado de 72.

8 Daqui a 10 anos Karina terá 28 anos. Escreva uma equação que nos permita calcular a idade que Karina tem atualmente.

9 Um carpinteiro serra uma tábua de 50 cm em dois pedaços. O comprimento do pedaço menor representa a quarta parte do comprimento do pedaço maior. Escreva uma equação que nos permita calcular o comprimento de cada pedaço.

10 Em um terreno retangular, o comprimento tem 10 metros a mais que a largura. Se representarmos pela letra x o número de metros da largura, o comprimento será representado por $x + 10$. Se o triplo da largura é igual ao dobro do comprimento, escreva uma equação que represente esse fato.

CONJUNTO UNIVERSO E CONJUNTO SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO

Vamos considerar as seguintes situações:

1ª Dentre os elementos do conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, qual deles podemos colocar no lugar da letra x para tornar verdadeira a equação $x + 2 = 6$?

Fazendo a substituição, vemos que o elemento é o número 4, pois:

$$x + 2 = 6 \longrightarrow (4) + 2 = 6$$

Os demais elementos não tornam verdadeira a equação.

Assim:

- O conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, formado por todos os elementos que a incógnita x pode assumir, é denominado *conjunto universo* da equação.
- O conjunto $\{4\}$, formado pelo elemento de A que torna verdadeira a equação, chama-se *conjunto solução* da equação.
- O número 4 é a *solução* ou *raiz* da equação.

Síntese:

Equação dada: $x + 2 = 6$

Conjunto universo: $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Conjunto solução: $S = \{4\}$

Solução ou raiz da equação: o número 4

2ª Qual é o número natural que podemos colocar no lugar da letra x para tornar verdadeira a equação $3x = 15$?

Fazendo a substituição, vemos que o número natural é 5, pois:

$$3x = 15 \longrightarrow 3 \cdot (5) = 15$$

Os demais números naturais não tornam verdadeira a equação.

Assim:

- O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, que representa os valores que a incógnita x pode assumir, é denominado *conjunto universo* da equação.
- O conjunto $\{5\}$, formado pelo elemento de $\mathbb{N}$ que torna verdadeira a equação, chama-se *conjunto solução* da equação.
- O número 5 chama-se *solução* ou *raiz* da equação.

Síntese:

Equação dada: $3x = 15$
Conjunto universo: $U = \mathbb{N}$
Conjunto solução: $S = \{5\}$
Solução ou raiz da equação: o número 5

3ª Qual é o número inteiro que podemos colocar no lugar da letra y para tornar verdadeira a equação $2y + 1 = -5$?

Fazendo a substituição, vemos que o número inteiro procurado é -3, pois:

$$2y + 1 = -5 \longrightarrow 2 \cdot (-3) + 1 = -5$$

Síntese:

Equação dada: $2y + 1 = -5$
Conjunto universo: $U = \mathbb{Z}$
Conjunto solução: $S = \{-3\}$
Solução ou raiz da equação: o número -3

Pelas situações dadas, você verifica que, dada uma equação, devemos estabelecer inicialmente um conjunto numérico formado por todos os valores pelos quais a incógnita pode ser substituída. Esse conjunto é chamado *conjunto universo* da equação.

Assim:

- Se $U = \mathbb{N}$, a incógnita pode assumir o valor de qualquer número natural.
- Se $U = \mathbb{Z}$, a incógnita pode assumir o valor de qualquer número inteiro.
- Se $U = \mathbb{Q}$, a incógnita pode assumir o valor de qualquer número racional.

Você verifica, também, que o conjunto solução (S) de uma equação é formado por todos os valores do conjunto universo dado que tornam verdadeira a equação e, por esse motivo, também pode ser chamado *conjunto verdade* (V) da equação.

O conjunto solução pode ter um ou mais elementos, podendo ser também um conjunto vazio.

Exemplos:

1. Qual é o conjunto solução da equação $x - \frac{1}{2} = 0$, sendo $U = \mathbb{Z}$?

   Equação: $x - \frac{1}{2} = 0$

   Conjunto universo: $U = \mathbb{Z}$

   Conjunto solução: o conjunto solução é vazio e indica-se $S = \varnothing$

   Solução ou raiz: a equação não tem raiz no conjunto $\mathbb{Z}$.

2. Qual o conjunto solução da equação $x - \frac{1}{2} = 0$, sendo $U = \mathbb{Q}$?

   Equação: $x - \frac{1}{2} = 0$

   Conjunto universo: $U = \mathbb{Q}$

   Conjunto solução: $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

   Solução ou raiz: $\frac{1}{2}$

Como verificar se um número dado é raiz de uma equação

Para verificar se um número dado é raiz ou não de uma equação, devemos proceder da seguinte maneira:

- ✓ Substituímos a incógnita pelo número dado.
- ✓ Calculamos o valor numérico de cada membro da equação, separadamente.

Se a igualdade obtida for verdadeira, o número dado é raiz da equação; e se for falsa, não o é.

Exemplos:

1. Verificar se o número -6 é raiz da equação $3x - 5 = 5x + 7$.

   $3x - 5 = 5x + 7$

   $3 \cdot (-6) - 5 = 5 \cdot (-6) + 7$ ⟶ substituímos a incógnita x pelo número -6

   $-18 - 5 = -30 + 7$

   $-23 = -23$ ⟶ a sentença é verdadeira

   Logo, o número -6 é raiz da equação $3x - 5 = 5x + 7$.

2. Verificar se o número 2 é raiz da equação $y^2 - 5y = 3y + 6$.

   $y^2 - 5y = 3y + 6$

   $(2)^2 - 5 \cdot (2) = 3 \cdot (2) + 6$ ⟶ substituímos a incógnita y pelo número 2

   $4 - 10 = 6 + 6$

   $-6 = 12$ ⟶ a sentença é falsa

   Logo, o número 2 não é raiz da equação $y^2 - 5y = 3y + 6$.

FIXAÇÃO

1 Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes equações:

a) $x - 7 = 0, U = \mathbb{N}$

b) $x + 9 = 0, U = \mathbb{Z}$

c) $x - \frac{3}{8} = 0, U = \mathbb{Q}$

d) $x + 1 = 0, U = \mathbb{N}$

e) $x - 10 = 3, U = \mathbb{Q}$

f) $x - 6 = -10, U = \mathbb{Q}$

g) $2x = -16, U = \mathbb{Z}$

h) $4x = -40, U = \mathbb{Q}$

i) $8x = -8, U = \mathbb{Z}$

j) $8x = -8, U = \mathbb{Q}$

l) $\frac{x}{3} = 4, U = \mathbb{N}$

m) $x + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, U = \mathbb{Q}$

2 Verifique se:

a) o número 5 é raiz da equação $7x - 6 = 5x + 4$

b) o número 6 é raiz da equação $3x - 1 = \frac{x}{6} + 20$

c) o número $-\frac{8}{5}$ é raiz da equação $8 + 5x = 0$

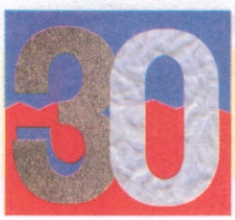
d) o número -2 é raiz da equação $y^2 - 3y = 8 - y$

e) o número $\frac{2}{3}$ é raiz da equação $2x + \frac{1}{6} = 3x - \frac{1}{2}$

3 Dentre os números 0, 1, 2 e 3, quais são raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$?

4 Dados os números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$, qual deles é raiz da equação $2x - \frac{1}{2} = 3x - \frac{2}{3}$?

5 O número -5 é raiz da equação $3 \cdot (x + 2) - 5 \cdot (x + 3) = 1$. Esta afirmação é correta?



EQUAÇÕES EQUIVALENTES

Como reconhecer se duas ou mais equações são equivalentes

Sabemos que podemos representar um número de diferentes formas.

Por exemplo, 3^2; $2^3 + 1$; $5^2 - 4^2$; $18 : 2$; $6 + 3$; $10 - 1$ são maneiras diferentes de representar o número nove.

De todas as maneiras de expressar o número nove, a mais simples de todas é 9.

Fato semelhante vai ocorrer com as equações. Veja a seguir.

❖ Consideremos as equações, sendo $U = \mathbb{Q}$:

$x + 3 = 10$, onde $S = \{7\}$

$x = 10 - 3$, onde $S = \{7\}$

$x = 7$, onde $S = \{7\}$

} Todas essas equações apresentam a mesma solução ou raiz, que é o número 7.

As equações $x + 3 = 10$, $x = 10 - 3$ e $x = 7$ apresentam a mesma raiz ou solução. Por esse motivo, são chamadas *equações equivalentes*.

A forma mais simples de representar essas equações é $x = 7$.

- Veja, agora, as equações, sendo $U = \mathbb{Q}$:

$2x = 10$, onde $S = \{5\}$

$x = \frac{10}{2}$, onde $S = \{5\}$

$x = 5$, onde $S = \{5\}$

} Todas essas equações apresentam a mesma solução ou raiz, que é o número

As equações $2x = 10$, $x = \frac{10}{2}$ e $x = 5$ apresentam a mesma raiz ou solução. Por esse motivo são chamadas *equações equivalentes*.

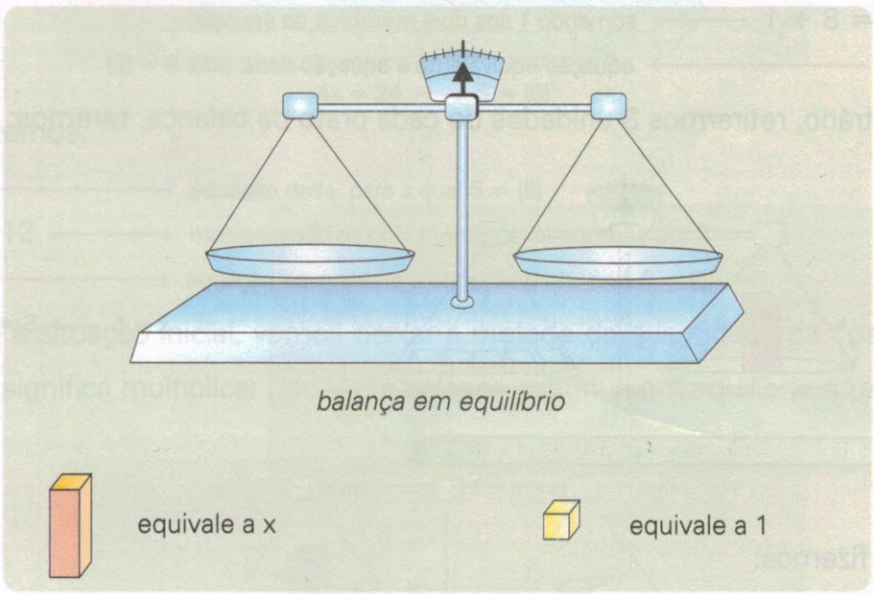
A forma mais simples de representar essas equações é $x = 5$.

> Em um mesmo conjunto universo, duas ou mais equações que apresentam o mesmo conjunto solução (não-vazio) são denominadas *equações equivalentes*.

Como escrever uma equação equivalente a uma equação dada: os princípios de equivalência

Podemos escrever uma equação equivalente a uma equação dada por meio de algumas transformações baseadas nos *princípios de equivalência*.

Vamos ilustrar os princípios de equivalência, utilizando as seguintes figuras:



balança em equilíbrio

"pesos" (em quilogramas)

Princípio aditivo: se $a = b$, então $a + c = b + c$.

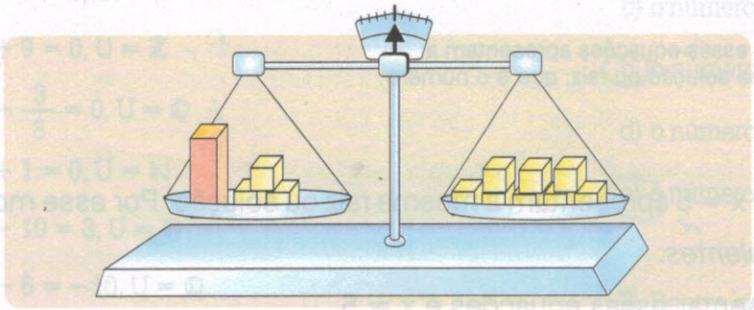
Princípio multiplicativo: se $a = b$, então $a \cdot c = b \cdot c$, com $c \neq 0$.

Observe os exemplos:

1. Obter uma equação equivalente à equação $x + 3 = 8$, escrita na sua forma mais simples.

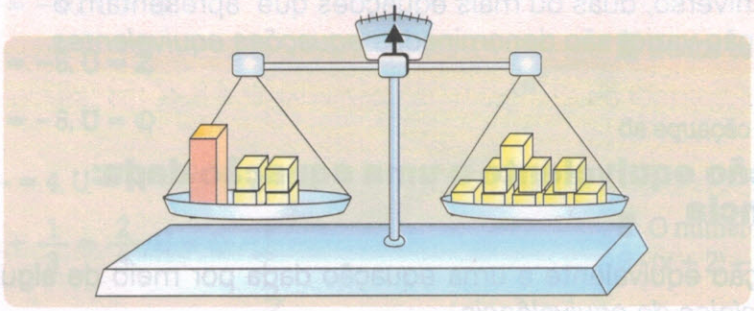
Supondo que x, 3 e 8 sejam "pesos" que foram colocados em pratos de uma balança em equilíbrio, teremos:

Se colocarmos 1 unidade em cada prato da balança, esta permanece em equilíbrio e teremos, então, a seguinte situação:



$x + 3 = 8 \longrightarrow S = \{5\}$

Veja o que fizemos:



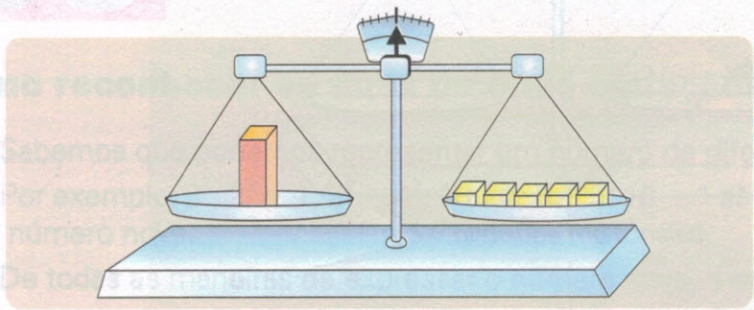
$x + 4 = 9 \longrightarrow S = \{5\}$

$x + 3 = 8 \longrightarrow$ equação dada, para a qual $S = \{5\}$

$x + 3 + 1 = 8 + 1 \longrightarrow$ somando 1 aos dois membros da equação

$x + 4 = 9 \longrightarrow$ equação equivalente à equação dada, pois $S = \{5\}$

Se, ao contrário, retirarmos 3 unidades de cada prato da balança, teremos:



$x = 5 \longrightarrow S = \{5\}$

Veja o que fizemos:

$x + 3 = 8 \longrightarrow$ equação dada, para a qual $S = \{5\}$

$x + 3 + (-3) = 8 + (-3) \longrightarrow$ somando (-3) aos dois membros da equação

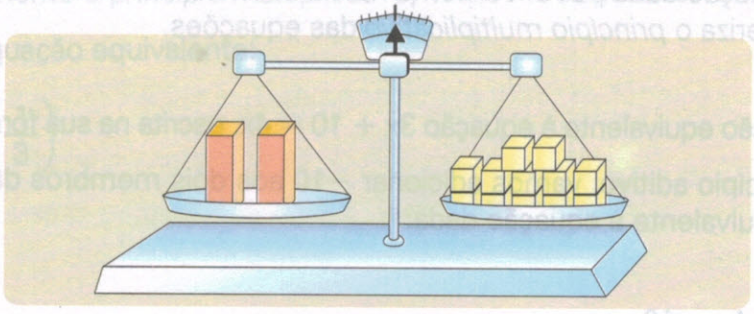
$x + \cancel{3} - \cancel{3} = 8 - 3 \longrightarrow$ anulando números opostos que estão no mesmo membro

$x = 5 \longrightarrow$ equação elementar, equivalente à equação dada, pois $S = \{5\}$

As equações $x + 3 = 8$ e $x = 5$ são equivalentes, pois ambas apresentam a mesma solução: o número 5.
A forma mais simples de escrever a equação $x + 3 = 8$ é $x = 5$.
Observe que, para obter a equação $x = 5$, equivalente à equação dada, adicionamos um mesmo número aos dois membros da equação $x + 3 = 8$.
Esse fato caracteriza o *princípio aditivo* das equações.

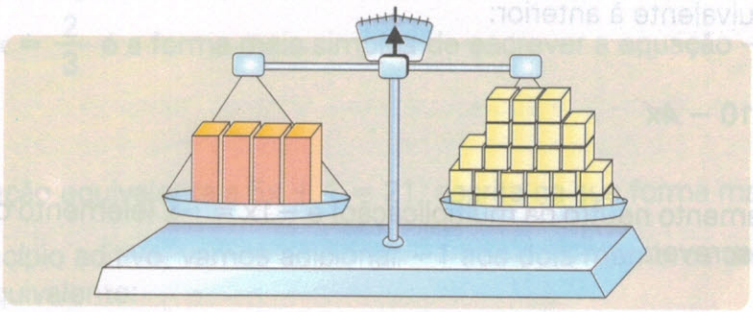
2. Obter uma equação equivalente à equação $2x = 12$, escrita na sua forma mais simples.

Supondo que $2x$ e 12 sejam "pesos" colocados em pratos de uma balança em equilíbrio, teremos:



$2x = 12 \longrightarrow S = \{6\}$

Vamos dobrar (multiplicar por 2) a quantidade de figuras em cada prato; a balança permanece em equilíbrio e teremos a seguinte situação:



$4x = 24 \longrightarrow S = \{6\}$

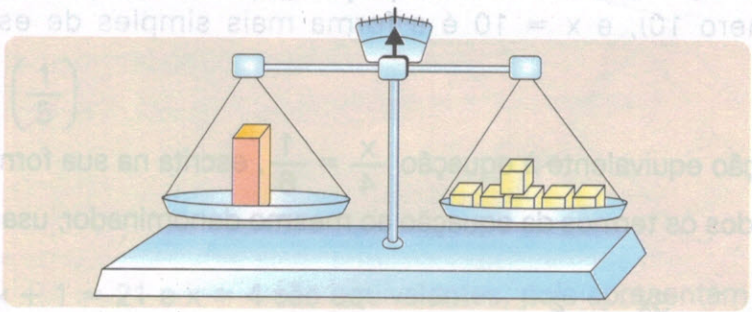
Veja o que fizemos:

$2x = 2 \longrightarrow$ equação dada, para a qual $S = \{6\}$

$2 \cdot (2x) = 2 \cdot 12 \longrightarrow$ multiplicando os dois membros da equação por 2

$4x = 24 \longrightarrow$ equação equivalente à equação dada, pois $S = \{6\}$

Com relação à situação inicial, vamos deixar a metade da quantidade de "pesos" em cada prato, o que significa multiplicar por $\frac{1}{2}$; a balança continua em equilíbrio e teremos:



$x = 6 \longrightarrow S = \{6\}$

Veja o que foi feito:

$2x = 12$ ⟶ equação dada, para a qual S = {6}

$\frac{1}{2} \cdot (2x) = \frac{1}{2} \cdot (12)$ ⟶ multiplicando os dois membros da equação por $\frac{1}{2}$

$x = 6$ ⟶ equação elementar, equivalente à equação dada, pois S = {6}

As equações $2x = 12$ e $x = 6$ são equivalentes, pois apresentam a mesma solução (o número 6). A forma mais simples de escrever a equação $2x = 12$ é $x = 6$.
Observe que, para obter a equação $x = 6$, equivalente à equação dada, multiplicamos os dois membros da equação dada por um mesmo número, diferente de zero.
Esse fato caracteriza o *princípio multiplicativo* das equações.

3. Obter uma equação equivalente à equação $3x + 10 = 4x$, escrita na sua forma mais simples.

Aplicando o princípio aditivo, vamos adicionar -10 aos dois membros da equação, obtendo uma equação equivalente à equação dada:

$3x + 10 = 4x$

$3x + \cancel{10} - \cancel{10} = 4x - 10$

$3x = 4x - 10$

Aplicando o princípio aditivo, vamos adicionar $-4x$ aos dois membros da equação, obtendo uma equação equivalente à anterior:

$3x = 4x - 10$

$3x - 4x = \cancel{4x} - 10 - \cancel{4x}$

$-1x = -10$

Como $1x = x$ (elemento neutro da multiplicação) e $-1x = -x$ (elemento oposto da multiplicação), podemos escrever:

$-1x = -10$

$-x = -10$

Aplicando o princípio multiplicativo, vamos multiplicar os dois membros por -1, obtendo assim uma equação mais simples e equivalente à equação dada:

$-x = -10$

$-x \cdot (-1) = -10 \cdot (-1)$

$x = 10$

As equações $3x + 10 = 4x$ e $x = 10$ são equações equivalentes, pois apresentam a mesma solução (o número 10), e $x = 10$ é a forma mais simples de escrever a equação $3x + 10 = 4x$.

4. Obter uma equação equivalente à equação $\frac{x}{4} = \frac{1}{6}$, escrita na sua forma mais simples.

Vamos reduzir todos os termos da equação ao mesmo denominador, usando equivalência de frações:

$\frac{x}{4} = \frac{1}{6} \longrightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2}{12}$

Aplicando o princípio multiplicativo, vamos multiplicar os dois membros por 12, obtendo uma equação equivalente e sem denominadores.

$$\frac{3x}{12} = \frac{2}{12}$$

$$\frac{3x}{12} \cdot (12) = \frac{2}{12} \cdot (12)$$

$$3x = 2$$

Aplicando novamente o princípio multiplicativo, vamos multiplicar os dois membros por $\frac{1}{3}$, obtendo uma equação equivalente:

$$3x \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$1x = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

As equações $\frac{x}{4} = \frac{1}{6}$ e $x = \frac{2}{3}$ são equivalentes, pois apresentam a mesma solução (o número $\frac{2}{3}$), e $x = \frac{2}{3}$ é a forma mais simples de escrever a equação $\frac{x}{4} = \frac{1}{6}$.

5. Obter uma equação equivalente a $5x + 1 = 21$, escrita na sua forma mais simples.

Aplicando o princípio aditivo, vamos adicionar -1 aos dois membros da equação e teremos uma equação equivalente:

$$5x + 1 = 21$$

$$5x + 1 - 1 = 21 - 1$$

$$5x = 20$$

Aplicando o princípio multiplicativo, vamos multiplicar os dois membros da equação por $\frac{1}{5}$ e teremos uma equação equivalente:

$$5x = 20$$

$$5x \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = 20 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$1x = 4$$

$$x = 4$$

As equações $5x + 1 = 21$ e $x = 4$ são equivalentes, pois apresentam a mesma solução (o número 4) e $x = 4$ é a forma mais simples de escrever a equação $5x + 1 = 21$.

FIXAÇÃO

1 Considerando os pares de equações em cada item, verifique se são ou não equivalentes:

a) $x + 4 = 7$ e $x = 7 - 4$

b) $x + 2 = 9$ e $x = 7$

c) $x - 5 = 0$ e $x = -5$

d) $2x = 18$ e $x = 9$

e) $5x = -15$ e $x = 3$

f) $x - 1 = -3$ e $x = -2$

g) $4x = 16$ e $x = 4$

h) $x + 2 = -5$ e $x = -7$

2 Usando os princípios de equivalência, escreva, na forma mais simples possível, uma equação equivalente a cada uma das seguintes equações:

a) $x + 2 = 5$

b) $x - 11 = 0$

c) $4x = -8$

d) $x - 2 = -1$

e) $6x = 6$

f) $4x = 3x + 9$

g) $3x = 7$

h) $5x + 1 = 16$

i) $\frac{x}{4} = \frac{3}{10}$

j) $10x - 2 = 7x$

l) $6x + 5 = 6$

m) $8x + 4 = 0$

31 EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Toda equação que, reduzida à sua forma mais simples, assume a forma $ax = b$, onde x representa a incógnita e a e b são números racionais, com $a \neq 0$, é denominada *equação do 1º grau com uma incógnita*.

Os números a e b são denominados coeficientes da equação. Exemplos:

1. $x = 6$ ⟶ equação do 1º grau na incógnita x
2. $3x = 12$ ⟶ equação do 1º grau na incógnita x
3. $-2y = 10$ ⟶ equação do 1º grau na incógnita y
4. $3t = -5$ ⟶ equação do 1º grau na incógnita t

Entretanto existem outras equações do 1º grau com uma incógnita que não são escritas na forma $ax = b$. Exemplos:

1. $2x + 5 = x - 4$ ⟶ equação do 1º grau na incógnita x
2. $y + \frac{2}{3}y = 5$ ⟶ equação do 1º grau na incógnita y
3. $3(x - 1) = 6$ ⟶ equação do 1º grau na incógnita x
4. $\frac{t}{2} + \frac{t-1}{3} = 1$ ⟶ equação do 1º grau na incógnita t

Essas equações podem ser reduzidas à forma mais simples de uma equação do 1º grau com uma incógnita através de transformações. Essas transformações são baseadas na aplicação dos princípios de equivalência das igualdades. É o que veremos a seguir.

32 RESOLVENDO UMA EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Consideremos a equação $\frac{x}{2} + 3 = 2(x - 1)$ cuja incógnita é representada pela letra x, sendo x um número racional desconhecido ($U = \mathbb{Q}$).

Essa equação estabelece, numa linguagem matemática, que, para um certo número racional x, as expressões $\frac{x}{2} + 3$ e $2(x - 1)$ representam o mesmo número.

Como descobrir esse número x?

A resposta para essa pergunta será dada neste capítulo.

Lembre-se:

Resolver uma equação do 1º grau com uma incógnita, dentro de um conjunto universo, significa determinar a solução ou raiz dessa equação, caso exista.

Veremos como proceder para resolver equações do 1º grau com uma incógnita, observando os exemplos a seguir:

1. Resolver a equação $5x + 1 = 36$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

Aplicando o princípio aditivo, vamos adicionar (-1) aos dois membros da equação, isolando o termo que contém a incógnita x no 1º membro:

$5x + 1 = 36$

$5x + 1 + (-1) = 36 + (-1)$

$5x + \cancel{1} - \cancel{1} = 36 - 1$

$5x = 35$

Aplicando o princípio multiplicativo, vamos multiplicar os dois membros da equação por $\frac{1}{5}$, descobrindo assim o valor do número x.

$\cancel{5}x \cdot \left(\frac{1}{\cancel{5}}\right) = \cancel{35} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{5}}\right)$

$x = 7$

Como $7 \in \mathbb{Q}$, temos $S = \{7\}$.

De forma prática:

$5x + 1 = 36$

$5x = 36 - 1$ ⟶ aplicamos o princípio aditivo

$5x = 35$

$x = \frac{35}{5}$ ⟶ aplicamos o princípio multiplicativo

$x = 7$

Como $7 \in \mathbb{Q}$, temos $S = \{7\}$

2. Resolver a equação $7x = 4x + 5$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

Aplicando o princípio aditivo, vamos adicionar $(-4x)$ aos dois membros da equação, isolando no 1º membro apenas os termos que contêm x:

$7x = 4x + 5$
$7x + (-4x) = 4x + 5 + (-4x)$
$7x - 4x = 4x + 5 - 4x$
$3x = 5$

Aplicando o princípio multiplicativo, vamos multiplicar os dois membros da equação por $\frac{1}{3}$, descobrindo assim o valor da incógnita x:

$3x \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$
$x = \frac{5}{3}$

Como $\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$, temos $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

De forma prática:

$7x = 4x + 5$
$7x - 4x = 5$ ⟶ pelo princípio aditivo
$3x = 5$
$x = \frac{5}{3}$ ⟶ pelo princípio multiplicativo

Como $\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$, temos $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

3. Resolver a equação $9x - 7 = 5x + 13$, sendo que $U = \mathbb{Q}$.

Devemos isolar no primeiro membro todos os termos da equação que apresentam a incógnita x e, no 2º membro, os termos que não apresentam a incógnita.
Inicialmente, vamos adicionar $(+7)$ aos dois membros da equação, de modo que todos os termos que não apresentam a incógnita x fiquem situados no 2º membro da equação:

$9x - 7 + (+7) = 5x + 13 + (+7)$
$9x - 7 + 7 = 5x + 13 + 7$
$9x = 5x + 20$

Vamos, agora, adicionar $-5x$ aos dois membros da equação, isolando assim, no 1º membro, todos os termos que apresentam a incógnita x:

$9x + (-5x) = 5x + 20 + (-5x)$
$9x - 5x = 5x + 20 - 5x$
$4x = 20$

Finalmente, vamos multiplicar os dois membros da equação por $\frac{1}{4}$ para determinar o valor da incógnita x:

$4x = 20$
$4x \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 20 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$
$x = 5$

Como $5 \in \mathbb{Q}$, temos $S = \{5\}$.

De forma prática:

$9x - 7 = 5x + 13$

$9x = 5x + 13 + 7$ ⟶ pelo princípio aditivo

$9x = 5x + 20$

$9x - 5x = 20$ ⟶ pelo princípio aditivo

$4x = 20$

$x = \frac{20}{4}$ ⟶ pelo princípio multiplicativo

$x = 5$

Como $5 \in \mathbb{Q}$, temos $S = \{5\}$.

4. Vamos resolver a equação $2 \cdot (2x - 1) - 6 \cdot (1 - 2x) = 2 \cdot (4x - 5)$, sendo $U = \mathbb{Q}$.
Inicialmente, vamos aplicar a propriedade distributiva da multiplicação para eliminar os parênteses:

$2 \cdot (2x - 1) - 6 \cdot (1 - 2x) = 2 \cdot (4x - 5)$

$4x - 2 - 6 + 12x = 8x - 10$

$4x + 12x - 2 - 6 = 8x - 10$

$+16x \quad - 8 = 8x - 10$

Aplicando o princípio aditivo, vamos adicionar $(+8)$ aos dois membros da equação para isolar no 2º membro todos os termos que não apresentam a incógnita x:

$16x - 8 + (+8) = 8x - 10 + (+8)$

$16x - 8 + 8 = 8x - 10 + 8$

$16x = 8x - 2$

Aplicando, novamente, o princípio aditivo vamos adicionar $-8x$ aos dois membros da equação para isolar no 1º membro todos os termos que apresentam a incógnita x:

$16x = 8x - 2$

$16x + (-8x) = 8x - 2 + (-8x)$

$16x - 8x = 8x - 2 - 8x$

$8x = -2$

Aplicando o princípio multiplicativo, vamos multiplicar os dois termos da equação por $\frac{1}{8}$ para determinar o valor da incógnita x:

$8x \cdot \left(\frac{1}{8}\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)$

$x = -\frac{1}{4}$

Como $-\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$, temos $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

De forma prática:

$2 \cdot (2x - 1) - 6 \cdot (1 - 2x) = 2 \cdot (4x - 5)$

$4x - 2 - 6 + 12x = 8x - 10$ ⟶ pela propriedade distributiva

$4x + 12x - 2 - 6 = 8x - 10$

$16x - 8 = 8x - 10$

$16x = 8x - 10 + 8$ ⟶ pelo princípio aditivo

$16x = 8x - 2$

$16x - 8x = -2$ ⟶ pelo princípio aditivo

$8x = -2$

$x = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$ ⟶ pelo princípio multiplicativo

Como $-\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$, temos $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

5. Vamos resolver a equação $\frac{3x}{4} - \frac{2}{3} = x - \frac{5}{2}$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

Inicialmente, vamos obter uma equação equivalente à equação dada e que não tenha denominadores. Para isso, reduzimos todos os termos da equação ao mesmo denominador e, a seguir, aplicamos o princípio multiplicativo, multiplicando todos os termos da equação pelo denominador comum:

$\frac{3x}{4} - \frac{2}{3} = x - \frac{5}{2}$

$\frac{9x}{12} - \frac{8}{12} = \frac{12x}{12} - \frac{30}{12}$

$\cancel{12} \cdot \left(\frac{9x}{\cancel{12}}\right) - \cancel{12} \cdot \left(\frac{8}{\cancel{12}}\right) = \cancel{12} \cdot \left(\frac{12x}{\cancel{12}}\right) - \cancel{12} \cdot \left(\frac{30}{\cancel{12}}\right)$

$9x - 8 = 12x - 30$

Vamos aplicar o princípio aditivo, adicionando 8 aos dois membros da equação:

$9x - 8 = 12x - 30$

$9x - 8 + (+8) = 12x - 30 + (+8)$

$9x - \cancel{8} + \cancel{8} = 12x - 30 + 8$

$9x = 12x - 22$

Aplicando, novamente, o princípio aditivo vamos adicionar $-12x$ aos dois membros:

$9x = 12x - 22$

$9x + (-12x) = 12x - 22 + (-12x)$

$9x - 12x = \cancel{12x} - 22 - \cancel{12x}$

$-3x = -22$

$3x = 22$

Aplicando o princípio multiplicativo, vamos multiplicar os dois membros da equação por $\frac{1}{3}$:

$$\cancel{3}x \cdot \left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) = 22 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x = \frac{22}{3}$$

Como $\frac{22}{3} \in \mathbb{Q}$, temos $S = \left\{\frac{22}{3}\right\}$.

De forma prática:

$$\frac{3x}{4} - \frac{2}{3} = x - \frac{5}{2}$$

$$\frac{9x}{12} - \frac{8}{12} = \frac{12x}{12} - \frac{30}{12} \longrightarrow \text{reduzindo ao mesmo denominador}$$

$$9x - 8 = 12x - 30 \longrightarrow \text{cancelando os denominadores}$$

$$9x = 12x - 30 + 8 \longrightarrow \text{aplicando o princípio aditivo}$$

$$9x = 12x - 22$$

$$9x - 12x = -22 \longrightarrow \text{aplicando o princípio aditivo}$$

$$-3x = -22$$

$$3x = 22$$

$$x = \frac{22}{3} \longrightarrow \text{pelo princípio multiplicativo}$$

Como $\frac{22}{3} \in \mathbb{Q}$, temos $S = \left\{\frac{22}{3}\right\}$.

6. Vamos resolver a equação $\frac{2x+5}{3} - \frac{4x-9}{6} = \frac{3-4x}{2}$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

Inicialmente, vamos reduzir todos os termos ao mesmo denominador:

$$\frac{2x+5}{3} - \frac{4x-9}{6} = \frac{3-4x}{2}$$

$$\frac{2 \cdot (2x+5)}{6} - \frac{1 \cdot (4x-9)}{6} = \frac{3 \cdot (3-4x)}{6}$$

Multiplicando todos os termos por 6 (princípio multiplicativo), vamos obter uma equação equivalente e sem denominadores:

$$\frac{2 \cdot (2x+5)}{6} - \frac{1 \cdot (4x-9)}{6} = \frac{3 \cdot (3-4x)}{6}$$

$$\cancel{6} \cdot \left[\frac{2 \cdot (2x+5)}{\cancel{6}}\right] - \cancel{6} \cdot \left[\frac{1 \cdot (4x-9)}{\cancel{6}}\right] = \cancel{6} \cdot \left[\frac{3 \cdot (3-4x)}{\cancel{6}}\right]$$

$$2 \cdot (2x+5) - 1 \cdot (4x-9) = 3 \cdot (3-4x)$$

Vamos eliminar os parênteses:

$4x + 10 - 4x + 9 = 9 - 12x$

$19 = 9 - 12x$

Adicionando (-19) aos dois membros da equação (princípio aditivo):

$19 + (-19) = 9 - 12x + (-19)$

$19 - 19 = 9 - 12x - 19$

$0 = -10 - 12x$

Adicionando $(+12x)$ aos dois membros da equação (princípio aditivo):

$0 + (+12x) = -10 - 12x + (+12x)$

$0 + 12x = -10 - 12x + 12x$

$12x = -10$

Multiplicando os dois membros por $\frac{1}{12}$ (princípio multiplicativo):

$(12x) \cdot \left(\frac{1}{12}\right) = -10 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)$

$x = -\frac{5}{6}$

Como $-\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$, temos $S = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$.

De forma prática:

$\frac{2x + 5}{3} - \frac{4x - 9}{6} = \frac{3 - 4x}{2}$

$\frac{2 \cdot (2x + 5)}{6} - \frac{1 \cdot (4x - 9)}{6} = \frac{3 \cdot (3 - 4x)}{6}$ ⟶ reduzindo ao mesmo denominador

$2 \cdot (2x + 5) - 1 \cdot (4x - 9) = 3 \cdot (3 - 4x)$ ⟶ cancelando os denominadores

$4x + 10 - 4x + 9 = 9 - 12x$

$19 = 9 - 12x$

$19 + 12x = 9$ ⟶ princípio aditivo

$12x = 9 - 19$ ⟶ princípio aditivo

$12x = -10$

$x = -\frac{10}{12}$ ⟶ princípio multiplicativo

$x = -\frac{5}{6}$

Como $-\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$, temos $S = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$.

7. Resolver a equação $7x + 6 = 7x + 10$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

$7x + 6 - 6 = 7x + 10 - 6$

$7x = 7x + 4$

$7x - 7x = 7x + 4 - 7x$

$0x = 4$

Como não existe nenhum número racional que multiplicado por zero dá resultado 4, dizemos que a equação é impossível e $S = \varnothing$.

8. Resolver a equação $5 - 2x = 5 - 2x$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

$5 - 2x + (-5) = 5 - 2x + (-5)$

$5 - 2x - 5 = 5 - 2x - 5$

$-2x = -2x$

$-2x + 2x = -2x + 2x$

$0x = 0$

Como todo número racional verifica essa igualdade, dizemos que a equação é uma identidade e $S = \mathbb{Q}$.

FIXAÇÃO

1 Vamos resolver as seguintes equações do 1º grau com uma incógnita, sendo $U = \mathbb{Q}$:

a) $2x - 8 = 8$

b) $3x + 1 = 19$

c) $7y - 4 = 10$

d) $2t + 1 = -8$

e) $11 - 3y = 2$

f) $3x = -7 + x$

g) $9x + 5 = 4x$

h) $20 = -6x + 32$

i) $17x + 40 = 21x$

j) $8x - 14 = 2x$

2 Sendo $U = \mathbb{Q}$, vamos resolver as seguintes equações do 1º grau com uma incógnita:

a) $7x + 1 - 5x = 9$

b) $y + 9y + 5 = -15$

c) $17x - 1 = 15x + 3$

d) $16 - x = x + 25$

e) $20x - 13 = 20 + 9x$

f) $21x + 1 = 11x + 6$

g) $9x - 23 = 13x - 27$

h) $0{,}8 + 2x = x + 3{,}5$

i) $3{,}5x + 1 = 3{,}1x + 3$

j) $5 - x - 22 = 4x - 11 - 6x$

3 Sendo $U = \mathbb{Q}$, determine o conjunto solução S de cada uma das seguintes equações do 1º grau com uma incógnita:

a) $3 - (3x - 6) = 2x + (4 - x)$

b) $4 \cdot (x - 2) = 4 + 2 \cdot (x - 1)$

c) $7x - 3 \cdot (x - 2) = 3 \cdot (x + 4)$

d) $2 \cdot (y - 2) + 5 \cdot (2 - y) = -3 \cdot (2y + 2)$

e) $2 \cdot (1 - t) + 1 = 3 \cdot (t - 3) - 2t$

f) $5 \cdot (m + 1) - 3 \cdot (2m + 1) = 4 \cdot (5 - m)$

g) $y - [y - (2 - y) - 1] = -(1 - y)$

h) $5[-x + 2 \cdot (x + 4)] = 2 \cdot (3x + 19)$

i) $3[10 + (3y - 1) - (4 - y)] = 5 \cdot (y + 10)$

4 Dadas as seguintes equações do 1º grau com uma incógnita, determine o conjunto solução S de cada equação, sendo $U = \mathbb{Q}$:

a) $x + \frac{x}{5} = 12$

b) $x - \frac{x}{7} = -3$

c) $\frac{x}{5} + \frac{x}{2} = 21$

d) $5 = \frac{5}{7} - 3x$

e) $\frac{1}{6} - \frac{x}{2} = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$

f) $\frac{3y}{8} - \frac{5}{6} = \frac{y}{3} - \frac{5}{2}$

g) $\frac{2t}{5} - 4 = \frac{t}{4} + 2$

h) $\frac{m}{2} - 4 = \frac{m}{3} + \frac{1}{3}$

5 Dentro do conjunto universo $\mathbb{Q}$, vamos resolver as seguintes equações do 1º grau com uma incógnita:

a) $x - 4 - \frac{x+4}{3} = 0$

b) $\frac{x-8}{2} - 4 = x$

c) $\frac{x-2}{8} = \frac{x-4}{3}$

d) $\frac{4x}{3} - \frac{3}{2} = \frac{x-3}{3}$

e) $\frac{3-x}{8} = \frac{x+1}{4} - \frac{x}{3}$

f) $\frac{t-5}{2} - \frac{1}{3} = \frac{t}{3} - \frac{3t+14}{12}$

g) $\frac{2m-5}{8} + \frac{m-1}{2} = \frac{13m+3}{4}$

h) $\frac{x+1}{5} + \frac{6x+1}{12} = \frac{3x+1}{3}$

i) $a - \frac{4-a}{5} = 4 - \frac{4-a}{4}$

j) $\frac{y}{3} + \frac{5\cdot(y-3)}{12} + \frac{y-3}{4} = \frac{y}{2}$

6 Resolvendo as equações $2x - 6 = 10$, $3x - 5 = 4$ e $5x - 7 = 8$ no conjunto $\mathbb{Q}$, verificamos que duas delas são equivalentes. Quais são essas duas equações?

7 A equação $\frac{3}{2}x + 2 = 3x - 2$ tem solução ou raiz no conjunto $\mathbb{Z}$?

8 A raiz da equação $\frac{2\cdot(x+1)}{3} = 2 - x$ está situada entre dois números inteiros. Quais são esses números?

9 São dadas as equações $10y + 4 = 16y - 8$ e $9x - 4 = 6x + 8$. Nessas condições, calcule:

a) o valor do número y

b) o valor do número x

c) o produto de y por x

d) o quociente de y por x

10 Na resolução de um problema, um aluno montou a seguinte equação, considerando a letra m como a incógnita:

$3 \cdot (m - 2) - \frac{7m-1}{2} = \frac{m-4}{3}$. A solução dessa equação é um número positivo ou negativo?

11 Qual deve ser o valor racional de x para que se tenha $\frac{2}{3}x + 5 \cdot (2x - 3) = \frac{3\cdot(4x-1)}{2} + 11$?

12 Dada a expressão $x - 2\cdot(3 - 2x)$, qual deve ser o valor de x para que essa expressão seja igual a zero?

13 Dada a equação $\frac{x-4}{3} - 1 = \frac{x-2}{8}$, responda:

a) Quais são os divisores naturais do número que representa a solução dessa equação?

b) Qual é o valor numérico da expressão $0{,}1 : \frac{1}{x}$, sendo x a raiz da equação dada?

c) Qual é o número que representa o quadrado da raiz dessa equação?

14 Na equação $(m - 3) \cdot x + 3x + 4 \cdot (m - 5) = 0$, temos que $x = 2$. Nessas condições, qual é o número que expressa o valor da letra m?

33 USANDO EQUAÇÕES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quando vamos resolver um problema, devemos:

- ✓ Ler com atenção o problema e levantar dados.
- ✓ Fazer a tradução do enunciado para a linguagem das equações, usando letras e símbolos.
- ✓ Resolver a equação estabelecida.
- ✓ Analisar o resultado obtido e dar a resposta conveniente.

Vejamos alguns exemplos de problemas em cujas soluções serão usadas equações do 1º grau com uma incógnita:

1. Em um colégio, 20% dos professores ensinam Matemática. Sabendo-se que o colégio ainda tem 24 professores que ensinam as outras matérias, quantos professores há, ao todo, nesse colégio?

O problema nos pede para encontrar um certo número que representa o número total de professores de um colégio.
Vamos, então, indicar esse número pela letra *y* e escrever a equação correspondente, usando a incógnita *y* onde for necessário indicar o número desconhecido.

Convém lembrar que $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ (: 20 e : 20)

$$\frac{1}{5}y + 24 = y$$

- $\frac{1}{5}y$ → número de professores que ensinam Matemática
- 24 → número de professores que ensinam as outras matérias
- y → número total de professores

Resolvendo a equação, temos:

$$\frac{1}{5}y + 24 = y$$

$$\frac{y}{5} + \frac{120}{5} = \frac{5y}{5}$$

$$y + 120 = 5y$$

$$y = 5y - 120$$

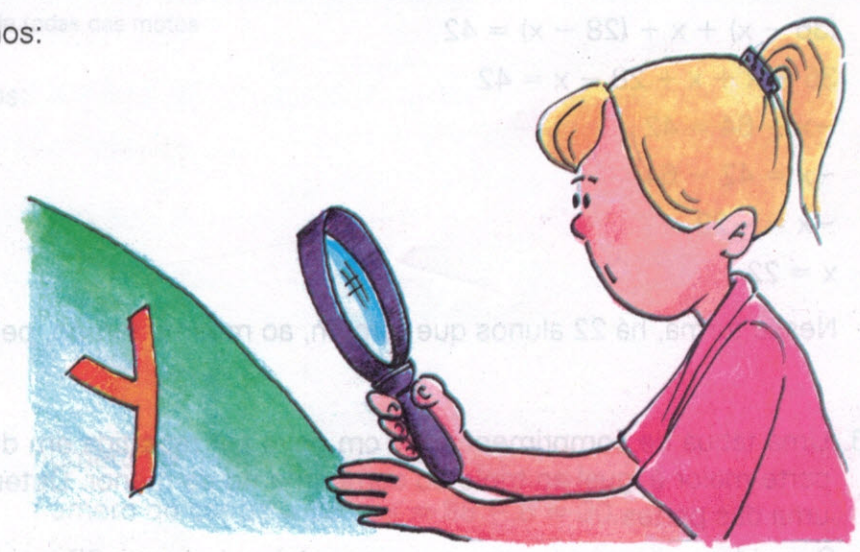
$$y - 5y = -120$$

$$-4y = -120$$

$$4y = 120$$

$$y = \frac{120}{4}$$

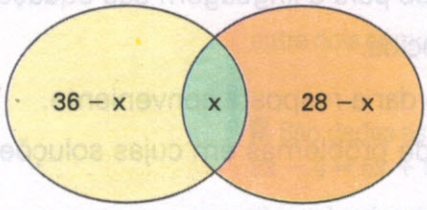
$$y = 30$$



Nesse colégio há, ao todo, 30 professores.

2. Numa 6ª série *A* de uma escola, ocorre um fato curioso. Os 42 alunos da turma ou torcem pelo Corinthians ou pelo Flamengo ou por ambos. Um professor perguntou:
— Quem torce pelo Flamengo?
36 alunos levantaram a mão.
A seguir, o professor perguntou:
— Quem torce pelo Corinthians?
28 alunos levantaram a mão.
Nessa turma, quantos alunos torcem, ao mesmo tempo, pelo Flamengo e pelo Corinthians?

Para resolver este problema, podemos montar o seguinte diagrama:



A parte colorida de verde representa o número de alunos que torce, ao mesmo tempo, pelos dois clubes: x

A parte colorida de amarelo representa o número de alunos que torce pelo Flamengo, mas não torce pelo Corinthians: $36 - x$.

A parte colorida de laranja representa o número de alunos que torce pelo Corinthians, mas não torce pelo Flamengo: $28 - x$.

A soma desses números deverá dar o total de alunos da sala; assim, teremos a equação:

$$(36 - x) + x + (28 - x) = 42$$

- 42 → total de alunos
- $(28 - x)$ → torcem apenas pelo Corinthians
- x → torcem pelos dois clubes, ao mesmo tempo
- $(36 - x)$ → torcem apenas pelo Flamengo

Resolvendo a equação, temos:

$(36 - x) + x + (28 - x) = 42$

$36 - x + x + 28 - x = 42$

$-x + 64 = 42$

$-x = 42 - 64$

$-x = -22$

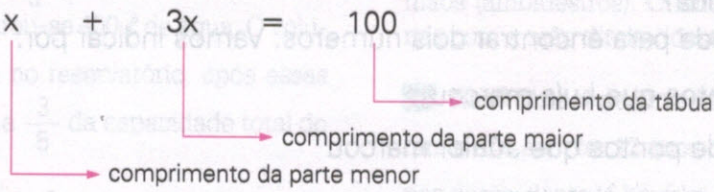
$x = 22$

Nessa turma, há 22 alunos que torcem, ao mesmo tempo, pelos dois clubes.

3. Uma tábua de comprimento 100 cm deve ser repartida em duas partes. O comprimento da parte maior é igual ao triplo do comprimento da menor. Determinar o comprimento de cada uma das partes.

O problema nos pede para encontrar dois números que representem os comprimentos de cada parte da tábua que foi repartida, sendo um o triplo do outro.

Vamos, então, representar esses comprimentos por x (da parte menor) e $3x$ (da parte maior). Escrevendo a equação correspondente, temos:



Resolvendo a equação, temos:

$x + 3x = 100$

$4x = 100$

$x = \frac{100}{4} = 25$

comprimento da parte menor = 25 cm

comprimento da parte maior = $3 \cdot 25 = 75$ cm

Os comprimentos das partes são 25 cm e 75 cm.

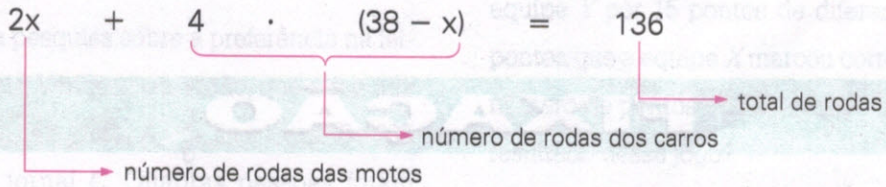
4. Em um estacionamento há carros e motos num total de 38 veículos e 136 rodas. Quantas motos e quantos carros há nesse estacionamento?

O problema nos pede para encontrar dois números. Vamos indicar por:

x, o número de motos

$38 - x$, o número de carros

Como cada moto tem 2 rodas e cada carro tem 4 rodas, vamos escrever a equação:



Resolvendo a equação, temos:

$2x + 4 \cdot (38 - x) = 136$

$2x + 152 - 4x = 136$

$-2x + 152 = 136$

$-2x = 136 - 152$

$-2x = -16$

$2x = 16$

$x = \frac{16}{2} = 8$

número de motos = 8

número de carros = $38 - x = 38 - 8 = 30$.

No estacionamento há 8 motos e 30 carros.

5. Júnior e Luís jogam na mesma equipe de basquete. No último jogo dessa equipe, os dois juntos marcaram 52 pontos. Júnior marcou 10 pontos a mais que Luís. Quantos pontos Júnior marcou nessa partida?

O problema nos pede para encontrar dois números. Vamos indicar por:

x, o número de pontos que Luís marcou

$x + 10$, o número de pontos que Júnior marcou

Como os dois juntos marcaram 52 pontos, vamos escrever a equação:

$$\underbrace{x}_{\text{Luís}} + \underbrace{\underbrace{x}_{\text{Luís}} + 10}_{\text{Júnior}} = \underbrace{52}_{\text{os dois juntos}}$$

Resolvendo a equação, temos:

$x + x + 10 = 52$

$2x + 10 = 52$

$2x = 52 - 10$

$2x = 42$

$x = \frac{42}{2} = 21$

Luís marcou 21 pontos

Júnior marcou $21 + 10 = 31$

Júnior marcou 31 pontos e Luís marcou 21 pontos.

FIXAÇÃO

Usando uma equação do 1º grau com uma incógnita, vamos resolver os seguintes problemas:

1 A soma do quádruplo de um número com 63 é igual a 211. Qual é esse número?

2 Ao triplo de um número adicionamos 90. O resultado é igual ao quíntuplo do mesmo número. Qual é esse número?

3 A soma da quarta parte com a sexta parte de um número é o mesmo que a diferença entre o número e 56. Qual é esse número?

4 A diferença entre $\frac{5}{4}$ e a metade de um mesmo número é igual a $\frac{9}{2}$. Qual é esse número?

5 A metade da minha idade aumentada $\frac{4}{5}$ é igual a 52 anos. Qual é a minha idade?

6 Quando diminuímos 8 anos da idade de Helena, obtemos $\frac{3}{5}$ de sua idade. Qual é a idade dela?

7 Se você diminuir $\frac{5}{8}$ da área de um terreno, a área passará a ser de 1 125 m². Qual é a área desse terreno, em metros quadrados?

8 São dados dois números, dos quais o maior é 400. Tirando 210 do maior e 148 do menor, a soma dos resultados é 200. Qual é o menor número?

9 Um reservatório estava totalmente cheio de água. Inicialmente, esvaziou-se $\frac{1}{3}$ da capacidade desse reservatório e, a seguir, retirou-se 400 ℓ de água. O volume de água que restou no reservatório, após essas operações, corresponde a $\frac{3}{5}$ da capacidade total do reservatório.

a) Quantos litros de água cabem nesse reservatório?

b) Quantos litros de água restaram no reservatório?

10 A soma da metade com a terça parte da quantia que uma pessoa tem é igual a R$ 45 000,00. Qual é essa quantia?

11 Em uma caixa cabem 24 garrafas. Se você colocar 1 520 garrafas em caixas como essa, vai obter x caixas completas e uma incompleta, com 8 garrafas. Quantas caixas completas você vai obter?

12 Já li $\frac{3}{5}$ do total de páginas de um livro e ainda faltam 72 páginas. Quantas páginas tem o livro?

13 Foi feita uma pesquisa sobre a preferência na leitura de três jornais. Verificou-se, então, que a metade dos entrevistados lia o jornal A, $\frac{2}{5}$ lia o jornal B e 235 pessoas liam o jornal C. Quantas pessoas foram entrevistadas?

14 Se adicionarmos um número natural com o seu sucessor e multiplicarmos o resultado por 5, vamos obter 635. Qual é o número natural considerado?

15 Uma empresa tem a matriz em São Paulo e filiais em todo o Brasil, e possui um total de 1 264 funcionários. Nas filiais trabalha o triplo do número de pessoas que trabalham na matriz. Quantos funcionários trabalham na matriz dessa empresa?

16 Uma tábua tem 120 cm de comprimento e deve ser dividida em duas partes, de tal forma que o comprimento da menor seja igual a $\frac{3}{5}$ do comprimento da maior. Qual é o comprimento de cada parte?

17 Numa turma de 30 alunos, 6 escrevem com a mão esquerda (canhotos) e dois escrevem com as duas mãos (ambidestros). Quantos alunos escrevem apenas com a mão direita (destros)?

18 Na 6ª série A de um colégio, $\frac{5}{7}$ dos alunos iniciaram o ano sem ter 12 anos completos. Apenas 10 alunos dessa classe já haviam completado 12 anos. Nessas condições, quantos alunos tem essa classe e quantos alunos iniciaram o ano sem ter completado 12 anos?

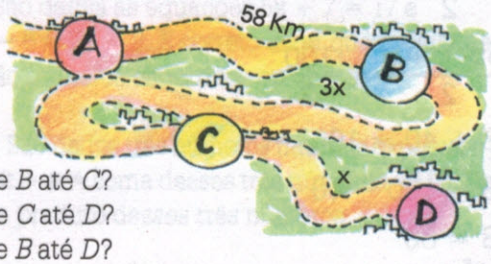
19 Em um terreiro há galinhas e coelhos, num total de 13 animais e 46 pés. Quantas galinhas e quantos coelhos há nesse terreiro?

20 A soma de dois números é 621 e a diferença entre eles é 49. Quais são os dois números?

21 Sérgio e Toninho compraram 200 figurinhas. Destas, 36 foram rasgadas e não puderam ser aproveitadas. Das figurinhas restantes, Toninho ficou com 10 a mais que Sérgio. Com quantas figurinhas ficou cada um?

22 Numa partida de basquete, a equipe X venceu a equipe Y por 15 pontos de diferença. O número de pontos que a equipe X marcou corresponde a $\frac{20}{17}$ do número de pontos que a equipe Y marcou. Qual foi o resultado desse jogo?

23 O esboço abaixo é de uma rodovia que passa pelas cidades A, B, C e D, entre as quais as distâncias estão marcadas em quilômetros. Sabendo-se que de A até D são 402 km, qual é a distância:



a) de B até C?

b) de C até D?

c) de B até D?

24 Em um torneio de basquete, cada vitória vale 2 pontos e cada derrota vale 1 ponto. No torneio do último ano, uma equipe disputou 35 jogos e atingiu um total de 65 pontos. Quantas vitórias conseguiu essa equipe?

21 APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES: AS FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Você já estudou as fórmulas matemáticas que usamos para calcular áreas de figuras geométricas planas e o volume de alguns sólidos geométricos.

Essas fórmulas representam um tipo especial de equação e, por esse motivo, a resolução de equações também será útil na resolução de problemas que envolvem fórmulas matemáticas.

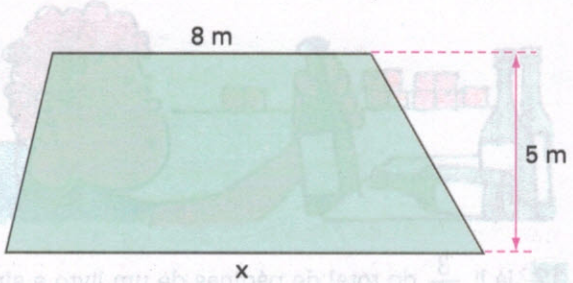
Vamos recordar:

> A área de um retângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura ou largura.

Se indicarmos por *A* o número que representa a área, por *b* o número que representa a medida da base ou comprimento e por *h* o número que representa a medida da altura ou largura, essa regra poderá ser abreviada e escrita sob a forma de uma equação: $A = b \cdot h$.

Vejamos alguns exemplos:

1. A área de um trapézio mede 50 m^2. A medida da base menor é 8 m e a medida da altura é 5 m. Calcular a medida da base maior.



A área do trapézio é dada por $\frac{(B + b) \cdot h}{2}$, onde *B* é a medida da base maior, *b* é a medida da base menor e *h* é a medida da altura.

Usando a fórmula, vamos escrever a equação do 1º grau com uma incógnita:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \Rightarrow 50 = \frac{(B + 8) \cdot 5}{2}$$

Vamos resolver a equação e obter o valor de *B*.

$$\frac{(B + 8) \cdot 5}{2} = 50$$

$$\frac{5B + 40}{2} = 50$$

$$\frac{5B + 40}{2} = \frac{100}{2}$$

$$5B + 40 = 100$$

$$5B = 100 - 40$$

$$5B = 60$$

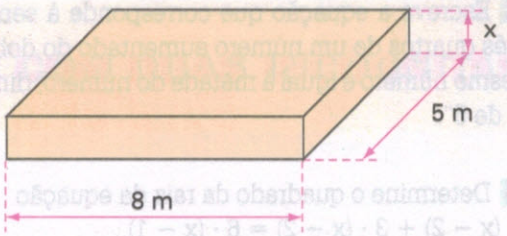
$$B = \frac{60}{5}$$

$$B = 12$$

A base maior mede 12 m.

2. O volume de um bloco retangular é de 120 m^3. O comprimento do bloco é de 8 m e a sua largura é de 5 m. Calcular a altura do bloco.

O volume do bloco retangular é dado por $a \cdot b \cdot c$, onde a é o comprimento, b é a largura e c é a altura.



Usando a fórmula, vamos escrever a equação do 1º grau com uma incógnita:

$a \cdot b \cdot c = 8 \cdot 5 \cdot c = 120$

$40c = 120$

$c = \frac{120}{40}$

$c = 3$

A altura do bloco é de 3 m.

FIXAÇÃO

1 O perímetro de um polígono representa a soma das medidas dos lados desse polígono. O perímetro de um retângulo é 60 cm. A medida da base é igual ao dobro da medida da altura. Calcule as dimensões do retângulo.

2 O perímetro de um triângulo é 27 cm. As medidas dos lados são expressas por três números inteiros e consecutivos. Quais são as medidas dos lados do triângulo?

3 Para indicar o comprimento de uma circunferência usamos a fórmula $C = 2 \cdot \pi \cdot r$, onde C representa o comprimento e r representa a medida do raio. Se consideramos $\pi = 3{,}14$ e o comprimento de uma circunferência é 314 cm, determine a medida do raio.

4 Um terreno tem a forma de um trapézio com uma área de 270 m^2. A base maior desse terreno mede 20 m e a altura, 15 m. Quanto mede a base menor do terreno?

$\left(\text{área do trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}\right)$

5 Num terreno retangular, a medida do contorno é de 80 metros. A lateral mede o triplo da frente do terreno. Querendo se colocar grade de ferro na frente do terreno, quantos metros de grade serão necessários?

6 A fórmula usada para calcular a área de um retângulo é: área $= b \cdot h$, onde b é a medida da base e h é a medida da altura. Se a área de um terreno retangular é de 360 m^2 e uma das suas dimensões é 12 m, calcule a outra dimensão.

7 A raiz da equação $\frac{3x + 5}{2} - \frac{2x - 9}{3} = 8$ é, também, raiz da equação:

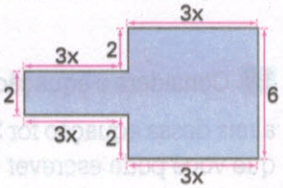
a) $3x = -15$
b) $3x = 27$
c) $3x = 9$
d) $3x = 15$

8 Verifique se o número -5 é raiz da equação $6(x + 5) - 5x = 25$.

9 São dadas as equações $5x + 7 = 17$ e $7y - 5 = 5y - 9$. É correto dizer que os valores de x e y são números simétricos ou opostos?

10 São dados três números naturais expressos por $2x$, x e $x + 4$. A soma desses três números é 116. Determine o produto desses três números.

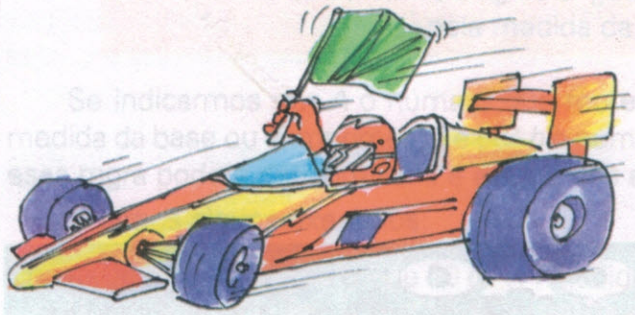
11 Na figura ao lado, as medidas estão expressas em centímetros e o seu perímetro é igual a 36 cm. Qual é o valor de x?



12 Escreva a equação que corresponde à sentença "três quartos de um número aumentado do dobro do mesmo número é igual à metade do número, diminuída de 5".

13 Determine o quadrado da raiz da equação $2 \cdot (x - 2) + 3 \cdot (x - 2) = 6 \cdot (x - 1)$.

14 O campeonato de Fórmula 1 terminou com o campeão levando 7 pontos de vantagem sobre o vice-campeão. Se os dois juntos, campeão e vice, somaram 173 pontos no final da temporada, quantos pontos cada um marcou nessa temporada?



15 Sabendo que $0,5 \cdot (1,5x - 10,6) = 0,7$, determine o número x.

16 Para uma excursão foram alugados 4 ônibus e em cada ônibus foram colocados 35 alunos. Além dos alunos, alguns professores participaram da excursão. Se, ao todo, 150 pessoas foram nessa excursão, quantos professores foram a esse passeio?

17 Um tanque está completamente cheio de água. Deixando-se escoar 68 litros de água, o tanque fica ainda com a terça parte da sua capacidade total. Qual é a capacidade desse tanque?

18 Considere a equação $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + px + q = 0$. Se a raiz dessa equação for 3, qual a relação de igualdade que você pode escrever entre os números p e q?

19 O IBGE contratou um certo número de entrevistadores para realizar o recenseamento em uma cidade. Se cada um deles visitasse 100 residências, não seriam visitadas 60 residências. Entretanto cada recenseador visitou 102 residências e, dessa forma, todas as residências foram visitadas. Quantos recenseadores foram contratados para realizar o censo nessa cidade?

20 Um professor de Educação Física comprou 3 bolas de basquete e 5 bolas de voleibol, gastando ao todo R$ 105,00. Cada bola de basquete custa R$ 3,00 a mais que a bola de voleibol. Nessas condições, calcule o preço de cada bola.

21 Em um concurso na televisão, um candidato foi submetido a perguntas sobre música popular. Ao acertar a 1ª pergunta, ganhou certa quantia. Acertou a 2ª e ganhou o dobro da quantia inicial; acertou a 3ª e ganhou o triplo da quantia inicial e, finalmente, acertando a 4ª, ganhou o quádruplo da quantia inicial. Se esse candidato recebeu nesse programa R$ 2 500,00, qual é o valor do prêmio inicial?

22 Em um torneio de futebol, uma equipe venceu $\frac{3}{5}$ dos jogos que disputou, empatou $\frac{1}{3}$ dos jogos e perdeu apenas 2.

a) Quantos jogos a equipe disputou nesse torneio?

b) Quantos jogos ganhou?

c) Quantos jogos empatou?

23 As aulas de Matemática, Ciências e Desenho Geométrico representam, juntas, $\frac{2}{5}$ do número total de aulas que um aluno tem durante a semana. Sabendo que o aluno tem 18 aulas de outras matérias durante a semana, responda:

a) Qual o total de aulas que o aluno tem durante a semana?

b) Quantas são as aulas de Matemática, Ciências e Desenho?

c) Se das aulas dessas matérias $\frac{1}{2}$ corresponde às aulas de Matemática, quantas aulas de Matemática o aluno tem durante a semana?

24 Uma tábua com 2,85 m de comprimento foi dividida em 3 partes. A primeira delas tem 0,90 m de comprimento, enquanto a segunda tem o dobro do comprimento da terceira. Determine, em metros, o comprimento da segunda e da terceira tábuas.

35 EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Observe esta situação:

Uma equipe de basquete disputa, em um torneio, 4 jogos.

No quadro seguinte, vamos colocar todas as possibilidades de vitórias e de derrotas dessa equipe no torneio.

Vitórias	Derrotas	Partidas disputadas
4	0	4 + 0 = 4
3	1	3 + 1 = 4
2	2	2 + 2 = 4
1	3	1 + 3 = 4
0	4	0 + 4 = 4

Indicando-se pela letra x o possível número de vitórias e pela letra y o possível número de derrotas, a sentença "Uma equipe de basquete disputa, em um torneio, 4 jogos" pode ser representada pela sentença matemática:

$$x + y = 4$$

Essa sentença matemática é chamada *equação do 1º grau com duas incógnitas.*

Assim, podemos afirmar:

> Toda equação que pode ser reduzida a uma equivalente da forma $ax + by = c$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, denomina-se equação do 1º grau com duas incógnitas, x e y.

Exemplos de equações do 1º grau com duas incógnitas:

$x + y = 23$ $\qquad$ $x - y = 19$ $\qquad$ $3x + y = 7$ $\qquad$ $2x - 3y = 31$

Solução de uma equação do 1º grau com duas incógnitas

Considerando a equação $2x + 5y = 16$, quais devem ser os valores dos números x e y para que a igualdade seja verdadeira?

Observe:

a) Se atribuirmos a x o valor 3 e a y o valor 2, teremos:

$$\underbrace{2 \cdot (3)}_{6} + \underbrace{5 \cdot (2)}_{10} = 16$$

$6 + 10 = 16 \longrightarrow$ a igualdade é verdadeira

b) Considerando $x = -2$ e $y = 4$, teremos:

$$\underbrace{2 \cdot (-2)}_{-4} + \underbrace{5 \cdot (4)}_{20} = 16$$

$-4 + 20 = 16 \longrightarrow$ a igualdade é verdadeira

c) Considerando $x = \frac{1}{2}$ e $y = 3$, teremos:

$$\underbrace{2 \cdot \frac{1}{2}}_{1} + \underbrace{5 \cdot (3)}_{15} = 16$$

$1 + 15 = 16 \longrightarrow$ a igualdade é verdadeira

d) Considerando $x = 4$ e $y = 1$, teremos:

$$\underbrace{2 \cdot (4)}_{8} + \underbrace{5 \cdot (1)}_{5} = 16$$

$8 + 5 = 16 \longrightarrow$ a igualdade não é verdadeira, pois $8 + 5 \neq 16$

e) Considerando $x = -4$ e $y = \frac{2}{5}$, teremos:

$$\underbrace{2 \cdot (-4)}_{-8} + \underbrace{5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)}_{2} = 16$$

$-8 + 2 = 16 \longrightarrow$ a igualdade não é verdadeira, pois $-8 + 2 \neq 16$

Pelo que foi visto acima, você notou que existem vários pares de números que tornam verdadeira a equação:

$x = 3$ e $y = 2$

$x = -2$ e $y = 4$

$x = \frac{1}{2}$ e $y = 3$

Todos esses pares de valores são soluções da equação $2x + 5y = 16$. Os outros pares não são soluções da equação dada.

Então:

> Uma equação do 1º grau com duas incógnitas tem *infinitas soluções*.
> Cada solução da equação é um par ordenado de números: o primeiro número representa *sempre* o valor de *x*, enquanto o segundo representa *sempre* o valor de *y*. Daí o nome *par ordenado*.
> Indica-se: (x, y).

Assim:

- ✓ O par de valores formado por $x = 3$ e $y = 2$ é uma solução da equação $2x + 5y = 16$. Essa solução pode ser indicada por $(3, 2)$.
- ✓ O par de valores formado por $x = \frac{1}{2}$ e $y = 3$ é outra solução da equação $2x + 5y = 16$. Essa solução pode ser indicada por $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

As soluções de uma equação do 1º grau com duas variáveis podem ser encontradas atribuindo-se valores para a incógnita *x* (ou para a incógnita *y*) e, a seguir, calculando-se o valor da outra incógnita.

Exemplos:

1. Determinar pelo menos três pares ordenados que sejam soluções da equação $2x + y = 3$.
Vamos atribuir valores arbitrários para x, calculando em seguida o valor de y:

$x = 1$

$2x + y = 3$

$2 \cdot (1) + y = 3$

$2 + y = 3$

$y = 3 - 2$

$y = 1$

$(1, 1)$

$x = -4$

$2x + y = 3$

$2 \cdot (-4) + y = 3$

$-8 + y = 3$

$y = 3 + 8$

$y = 11$

$(-4, 11)$

$x = \frac{2}{3}$

$2x + y = 3$

$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + y = 3$

$\frac{4}{3} + y = 3$

$\frac{4}{3} + \frac{3y}{3} = \frac{9}{3}$

$4 + 3y = 9$

$3y = 9 - 4$

$3y = 5$

$y = \frac{5}{3}$

$\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

Logo, os pares $(1, 1)$, $(-4, 11)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ são algumas das soluções da equação $2x + y = 3$.

2. Determinar uma solução da equação $3x - 7y = -12$, na qual $y = 6$.

$3x - 7y = -12$

$3x - 7(6) = -12$

$3x - 42 = -12$

$3x = -12 + 42$

$3x = 30$

$x = \frac{30}{3} = 10$

Logo, o par $(10, 6)$ é uma solução da equação.

3. Sabe-se que $2x + 3y = 7$. Se $x = 2m + 1$ e $y = m - 3$, determinar o valor de m, de x e de y.

$2x + 3y = 7$

$2 \cdot (2m + 1) + 3 \cdot (m - 3) = 7$ ⟶ substituindo x por seu valor $2m + 1$ e y pelo seu valor $m - 3$

$4m + 2 + 3m - 9 = 7$ ⟶ resolvendo a equação do 1º grau cuja incógnita é m

$7m - 7 = 7$

$7m = 7 + 7$

$7m = 14$

$m = \frac{14}{7} = 2$

Vamos calcular o valor de x e o valor de y:

$x = 2m + 1 = 2 \cdot (2) + 1 = 4 + 1 = 5$

$y = m - 3 = 2 - 3 = -1$

Logo, $m = 2$, $x = 5$ e $y = -1$

4. Sabe-se que $y = 10 - 3x$. Nessas condições, determinar o valor de x na equação $7x - 3y = 18$.

$7x - 3y = 18$

$7x - 3 \cdot (10 - 3x) = 18$ ⟶ substituindo y pelo seu valor $10 - 3x$

$7x - 30 + 9x = 18$

$16x - 30 = 18$

$16x = 18 + 30$

$16x = 48$

$x = \frac{48}{16} = 3$

Logo, temos que $x = 3$.

FIXAÇÃO

1 Escreva uma equação que represente cada uma das seguintes situações:

a) O número x aumentado do número y é igual a 61.

b) o dobro do número x diminuído de 7 é igual ao número y.

c) A soma do triplo do número x com o quíntuplo do número y é igual a 100.

d) O número x supera o número y em 7 unidades.

e) A metade do número x corresponde ao dobro do número y.

f) Dois terços do número x menos três quintos do número y é igual a 1.

2 Uma equipe de futebol, ao final dos dois turnos de um campeonato, acumulou 51 pontos. Representando por x o número de pontos ganhos no primeiro turno e por y o número de pontos ganhos no segundo turno, escreva uma equação que expresse essa afirmação.

3 Vamos representar por x a idade de Mariana e por y a idade de Gabriela. Escreva uma equação que represente o seguinte fato: a diferença entre a idade de Mariana e a idade de Gabriela é 2 anos.

4 Um livro custa x reais e um caderno custa y reais. Escreva uma equação que represente cada uma das seguintes situações:

a) O livro e o caderno custam juntos 32 reais.

b) O livro custa 25 reais a mais que o caderno.

c) O preço do livro é seis vezes o preço do caderno.

d) Se eu comprar 2 livros e 5 cadernos, vou gastar 60 reais.

5 Vamos representar por x o número de carros e por y o número de motos que há em um estacionamento. Escreva uma equação que expresse cada uma das seguintes situações:

a) No estacionamento há, ao todo, 20 veículos.

b) O número de carros é igual ao triplo do número de motos.

c) O número de carros supera o número de motos em 12.

d) A metade do número de carros é igual a cinco vezes o número de motos.

e) No estacionamento há, ao todo, 42 rodas.

6 Considerando a equação $9x + y = 1$, verifique se cada um dos pares ordenados a seguir é solução dessa equação:

a) $(0, 1)$

b) $(1, 0)$

c) $(1, -8)$

d) $(-1, 10)$

7 Dada a equação $2x + 3y = 1$, verifique se cada um dos pares ordenados a seguir é solução dessa equação:

a) $(-1, -1)$

b) $(-1, 1)$

c) $(1, 1)$

8 Só existe um par ordenado de números inteiros que é solução, ao mesmo tempo, das equações $x + y = 3$ e $x - y = 1$. Qual é esse par?

9 Verifique se o par ordenado $(3, -2)$ é solução, ao mesmo tempo, das equações $x + 2y = -1$ e $x - 2y = 7$.

10 Apresente três pares ordenados que sejam soluções da equação $x + 2y = 9$.

11 Determine uma solução da equação $4x + y = 20$, quando:

a) $x = 0$

b) $x = 5$

c) $x = -\frac{3}{4}$

d) $x = 2{,}5$

12 Determine uma solução da equação $10x - 3y = 7$, na qual:

a) $y = 1$

b) $y = -3$

c) $y = \frac{13}{3}$

d) $y = -1$

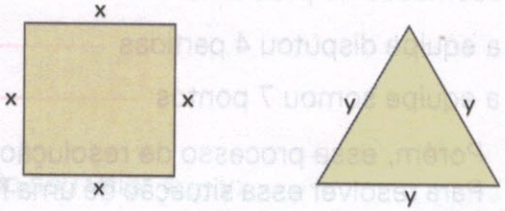
13 Sabendo que $x = 5y + 6$, determine o valor de y em cada uma das seguintes equações:

a) $2x + y = 34$

b) $3x - 2y = -21$

c) $5x = y$

14 As figuras a seguir são um quadrado e um triângulo eqüilátero, onde x é um número que representa a medida do lado do quadrado e y, um número que representa a medida do lado do triângulo eqüilátero.



a) Qual é a equação que representa o fato de as duas figuras terem perímetros iguais?

b) Se o lado do quadrado mede 15 cm, quanto mede o lado do triângulo?

c) Se o lado do triângulo mede 12 cm, quanto mede o lado do quadrado?

SISTEMA DE DUAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Consideremos a seguinte situação:

Em um jogo de voleibol não há empate. Por esse motivo, o regulamento de qualquer torneio de voleibol manda assinalar 2 pontos para cada partida que a equipe vence e 1 ponto para cada partida que a equipe perde. Se uma equipe disputou 4 partidas e somou 7 pontos, quantas partidas venceu e quantas perdeu?

A resposta pode ser encontrada no quadro seguinte, onde vamos colocar todas as possibilidades quanto ao número de partidas que a equipe venceu e perdeu, de acordo com os dados acima.

Número de partidas que a equipe venceu	Número de partidas que a equipe perdeu	Número de partidas disputadas	Soma dos pontos
0	4	$0 + 4 = 4$	$0 \cdot (2) + 4 \cdot (1) = 4$
1	3	$1 + 3 = 4$	$1 \cdot (2) + 3 \cdot (1) = 5$
2	2	$2 + 2 = 4$	$2 \cdot (2) + 2 \cdot (1) = 6$
3	1	$3 + 1 = 4$	$3 \cdot (2) + 1 \cdot (1) = 7$
4	0	$4 + 0 = 4$	$4 \cdot (2) + 1 \cdot (0) = 8$

Observando o quadro e de acordo com os dados da situação, notamos que a equipe venceu 3 partidas e perdeu 1 partida, pois esse é o único par de números que satisfaz as duas condições apresentadas no problema:

- ✓ a equipe disputou 4 partidas $\longrightarrow 3 + 1 = 4$
- ✓ a equipe somou 7 pontos $\longrightarrow 3 \cdot (2) + 1 \cdot (1) = 7$

Porém, esse processo de resolução torna-se, muitas vezes, longo e trabalhoso.

Para resolver essa situação de uma forma mais simples e rápida, podemos utilizar equações do 1º grau com duas incógnitas. Veja como:

Vamos representar por:

- ✓ x o número de partidas que a equipe venceu.
- ✓ y o número de partidas que a equipe perdeu.

Assim, podemos traduzir as duas condições do problema pelas seguintes equações:

$x + y = 4$ e $2x + 1y = 7$

- $x + y = 4$: 4 → total de partidas; y → nº de partidas que perdeu; x → nº de partidas que venceu
- $2x + 1y = 7$: 7 → total de pontos; $1y$ → pontos por derrotas; $2x$ → pontos por vitórias

Como as duas equações se referem ao mesmo fato, elas são ligadas pelo conectivo *e* e, em Matemática, dizemos que formam um *sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas*, x e y, e indicamos por:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

O par ordenado (3, 1), que torna verdadeiras as duas equações ao mesmo tempo, é chamado *solução* do sistema.

$$\begin{cases} x + y = 4 \longrightarrow 3 + 1 = 4 \longrightarrow \text{(verdadeira)} \\ 2x + y = 7 \longrightarrow 2 \cdot (3) + (1) = 7 \longrightarrow \text{(verdadeira)} \end{cases}$$

Convém notar que cada uma das equações, quando considerada isoladamente, tem infinitas soluções, mas o sistema de equações por elas formado tem uma única solução.

Como determinar a solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Já sabemos como formar um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Sabemos também que o sistema apresenta uma única solução, quando ela existe. Como faremos para descobrir que o par ordenado (3, 1) é a solução do sistema de equações formado com os dados do problema?

Acompanhe os exemplos:

1. Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

Processo de resolução

1º passo

Como a equação mais simples do sistema é a primeira, vamos determinar o valor de x nessa equação:

$x + y = 4$

$x = 4 - y$

2º passo

Na outra equação, vamos substituir a incógnita x pelo seu valor $4 - y$:

$2x + y = 7$

$2 \cdot (4 - y) + y = 7 \longrightarrow$ equação do 1º grau na incógnita y

$8 - 2y + y = 7$

$8 - y = 7$

$-y = 7 - 8$

$-y = -1$

$y = 1$

3º passo

Substituindo o valor de y em $x = 4 - y$, determinamos o valor da incógnita x:

$x = 4 - y$

$x = 4 - (1)$

$x = 4 - 1$

$x = 3$

Logo, a solução do sistema é dada pelo par ordenado (3, 1).

Esse método de resolução é chamado *método da substituição*.

2. Usando-se o método da substituição, resolver o sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ x = 4y \end{cases}$

Da 2ª equação, temos: $x = 4y$

Substituindo x pelo seu valor 4y na primeira equação, temos:

$2x - 5y = 6$

$2 \cdot (4y) - 5y = 6$

$8y - 5y = 6$

$3y = 6$

$y = \frac{6}{3}$

$y = 2$

Substituindo o valor de y em $x = 4y$, temos:

$x = 4y$

$x = 4 \cdot (2)$

$x = 8$

Logo, a solução do sistema é o par ordenado (8, 2).

3. Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

Processo de resolução

1º passo

Da primeira equação, vamos determinar o valor de x:

$x + y = 4$

$x = 4 - y$ (1)

2º passo

Da segunda equação, vamos determinar o valor da mesma incógnita x:

$2x + y = 7$

$2x = 7 - y$

$x = \frac{7 - y}{2}$ (2)

3º passo

Comparando as igualdades (1) e (2), temos:

$4 - y = \frac{7 - y}{2}$ ⟶ equação do 1º grau na incógnita y

$\frac{2 \cdot (4 - y)}{2} = \frac{1 \cdot (7 - y)}{2}$

$2(4 - y) = 1(7 - y)$

$8 - 2y = 7 - y$

$-2y = 7 - y - 8$

$-2y = -y - 1$

$-2y + y = -1$

$-y = -1 \Rightarrow y = 1$

4º passo

Substituindo o valor de y em $x = 4 - y$, temos:

$x = 4 - y$

$x = 4 - (1)$

$x = 4 - 1 \Rightarrow x = 3$

Logo, a solução do sistema é o par ordenado (3, 1).

Esse método de resolução é chamado de *método da comparação.*

4. Usando-se o método da comparação, resolver o sistema $\begin{cases} x = -2y \\ 3x + 7y = -5 \end{cases}$

Da primeira equação, temos que $x = -2y$.

Da segunda equação, vamos determinar o valor de x:

$3x + 7y = -5$

$3x = -5 - 7y$

$x = \dfrac{-5 - 7y}{3}$

Comparando as duas igualdades, temos:

$-2y = \dfrac{-5 - 7y}{3}$

$\dfrac{-6y}{3} = \dfrac{-5 - 7y}{3}$

$-6y = -5 - 7y$

$-6y + 7y = -5 \Rightarrow y = -5$

Substituindo o valor de y em $x = -2y$, temos:

$x = -2y$

$x = -2 \cdot (-5) \Rightarrow x = 10$

Logo, a solução do sistema é o par ordenado (10, −5).

Daí, podemos concluir:

Resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, x e y, significa determinar o único par ordenado (x, y) que é solução do sistema.
Para determinar a solução (x, y) de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas podemos usar o *método da substituição* ou o *método da comparação.*

Veja este exemplo:

Em um terreiro, temos galinhas e coelhos. São 17 animais e 48 pés. Quantas galinhas e quantos coelhos há nesse terreiro?

Vamos representar o número de galinhas pela letra x e o número de coelhos pela letra y. Vamos formar o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 17 & \longrightarrow \text{são 17 animais} \\ 2x + 4y = 48 & \longrightarrow \text{são 48 pés} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$x + y = 17$
$x = 17 - y$

$2x + 4y = 48$
$2 \cdot (17 - y) + 4y = 48$
$34 - 2y + 4y = 48$
$34 + 2y = 48$
$2y = 48 - 34$
$2y = 14$
$y = \frac{14}{2}$
$y = 7$ (número de coelhos)

$x = 17 - y$
$x = 17 - (7)$
$x = 17 - 7$
$x = 10$ (número de galinhas)

No terreiro há 10 galinhas e 7 coelhos.

FIXAÇÃO

1 Carlinhos e Celso têm, juntos, 201 figurinhas. Carlinhos tem o dobro de figurinhas de Celso. Monte um sistema de equações para representar as duas condições dadas.

2 Montando um sistema de duas equações, represente as seguintes condições: com 15 livros, uns com 3 cm de espessura e outros com 5 cm de espessura, poderemos formar uma pilha de livros com 50 cm de altura.

3 Verifique se o par ordenado (8, 1) é a solução do sistema $\begin{cases} x - 8y = 0 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$

4 Verifique se o par (7, 3) é solução do sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 15 \\ x + y = 4 \end{cases}$

5 O par $(-3, 5)$ é solução do sistema $\begin{cases} -x + 2y = 12 \\ 3x + 8y = 31 \end{cases}$
Essa afirmação é correta?

6 Usando o método da substituição, resolva cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - 3y = -12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2y \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

7 Usando o método da comparação, resolva cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 6x \\ 3x - 2y = 54 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 5y = 15 \\ 2x + y = 19 \end{cases}$

8 Usando qualquer um dos métodos, determine a solução de cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x = y + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2y \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 8x - y = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x = 3y \\ x + y = 50 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ -x - 4y = 10 \end{cases}$

9 Em uma revendedora há x carros e y motos, num total de 22 veículos. Esses veículos apresentam um total de 74 rodas. Monte um sistema de duas equações e determine quantos carros e quantas motos há nessa revendedora.

10 Um sorvete custa x reais e um doce custa y reais. A diferença entre o preço de um sorvete e o preço de um doce é 4 reais. Raquel tomou um sorvete e comprou dois doces, gastando ao todo 13 reais. Qual é o preço do sorvete?

11 O preço de uma lapiseira é o triplo do preço de uma caneta. Se as duas juntas custam 24 reais, qual é o preço de cada uma?

12 Uma tábua com 2,85 m de comprimento foi dividida em duas partes. O comprimento x da primeira parte tem 0,93 m a mais que o comprimento y da segunda. Qual é o comprimento de cada parte?

13 Um livro tem 160 páginas e eu já li uma parte dele. O número x de páginas que já li corresponde a $\frac{5}{3}$ do número y de páginas que falta para eu terminar de ler esse livro. Quantas páginas eu já li?

14 Um colégio tem 30 professores. O número x de professores que ensinam outras matérias é igual a quatro vezes o número y de professores que ensinam Matemática. Quantos professores ensinam Matemática nesse colégio?

Explorando Gráficos

Observe os gráficos sobre a violência no trânsito no Brasil.

1. O índice de motorização, isto é, a razão entre o número de habitantes e o número de veículos do Brasil, em 1996, era cerca de 5,7. Assim, para cada grupo de quase 6 pessoas havia um veículo. Usando o gráfico da frota, calcule aproximadamente a população brasileira em 1996.

2. Para representar a mortalidade no trânsito usa-se como índice o número de mortes para cada 10 000 veículos. Em 1996, esse índice era igual a 1,8 no Japão, enquanto na Coréia era 22,3. No Brasil, esse índice estava mais próximo de qual desses países?

3. Com os dados dos gráficos, calcule o índice de mortalidade no trânsito no Brasil de 1960 a 1996. Organize-os em uma tabela e construa um gráfico de colunas.

RETOMANDO o que aprendeu

1 Escreva a equação do 1º grau com duas incógnitas que representa a seguinte condição: o triplo do número x aumentado de 10 é igual a seis vezes o número y.

2 Caio ganhou x reais de seu pai, enquanto Celso ganhou y reais de sua mãe. A diferença entre o dobro da quantia que Caio ganhou e a quantia que Celso ganhou é de 10 reais. Escreva uma equação do 1º grau com duas incógnitas que expresse essa condição.

3 Será que o par ordenado $(-7, 5)$ é uma solução da equação $8x + 5y = -31$?

4 Verifique se o par ordenado $(10, -5)$ é a solução do sistema $\begin{cases} 4x - 5y = 65 \\ x = 2y \end{cases}$

5 Dada a equação $7x + 5y = 1$, encontre uma solução na qual se tenha:

a) $x = 3$

b) $y = -18$

6 Sabendo-se que $x = y + 6$, qual é o valor de y na equação $5x - 4y = 10$?

7 Encontre três soluções da equação $3x - 2y = 7$.

8 Verifique se o par ordenado $\left(-7, \frac{1}{2}\right)$ é solução do sistema $\begin{cases} 3x + 2y = -20. \\ x + 4y = -5 \end{cases}$

9 Determine o par ordenado (x, y) que representa a solução do sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 5x - 3y = 17 \end{cases}$

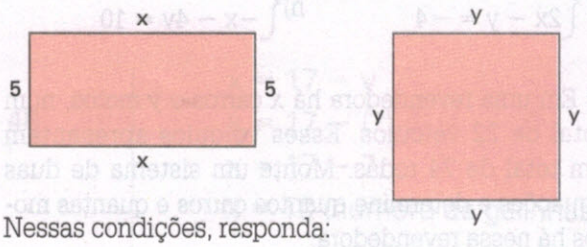
10 O par ordenado (x, y) é a solução do sistema $\begin{cases} x - 3y = -15 \\ 2x + 3y = 60 \end{cases}$

Nessas condições, determine o valor de $x + y$.

11 Dado o sistema $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + y = -2 \end{cases}$

em que (x, y) representa a solução do sistema, determine o valor de $x^2 + y^2$.

12 As figuras a seguir têm o mesmo perímetro:



Nessas condições, responda:

a) Qual a equação do 1º grau com duas incógnitas que expressa a condição dada?

b) Se o comprimento do retângulo mede 21 cm, qual a medida do lado do quadrado?

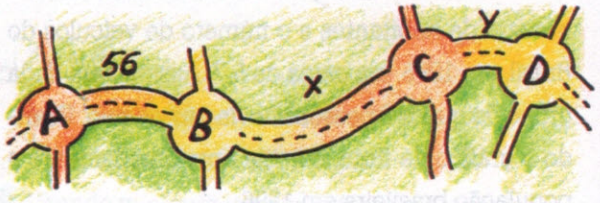
c) Se o lado do quadrado mede 15 cm, quanto mede o comprimento do retângulo?

13 Se (x, y) é a solução do sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 15 \\ x + 3y = 35 \end{cases}$ você pode afirmar que o número x é divisor do número y?

14 São dados dois números x e y. A soma desses números é igual a $\frac{1}{2}$ e a diferença entre eles é $\frac{3}{2}$. Quais são os dois números?

15 Tenho 36 fitas gravadas. O número de fitas de música brasileira é igual ao triplo do número de fitas de música estrangeira. Quantas fitas de música brasileira eu tenho?

16 O esboço abaixo é de uma rodovia ligando as cidades A, B, C e D. Sabe-se que de A até D são 320 km e que a distância de B até C é igual ao triplo da distância de C até D. Nessas condições, determine a distância de B até C.



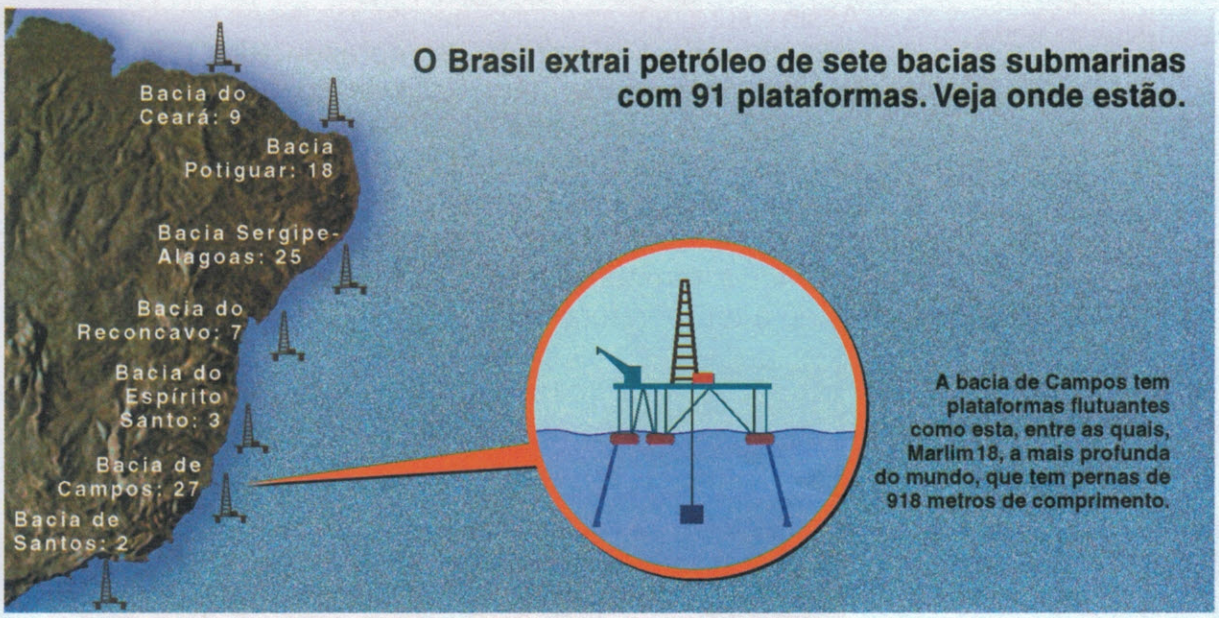
17 Com 22 livros de 3 cm e 7 cm de espessura formou-se uma pilha de 106 cm de altura. Quantos livros de cada espessura foram colocados?

JORNAIS & REVISTAS

A revista *Superinteressante* de maio de 1996 apresentou um artigo sobre as plataformas de petróleo no Brasil. Leia alguns trechos:

> Há 91 plataformas de petróleo em atividade nos mares brasileiros, sendo que a maioria delas é fixa. Nenhuma delas foi desativada até hoje porque são relativamente modernas.
>
> O Brasil produz 300 milhões de barris de petróleo por ano, 74% extraído do mar, e detém a tecnologia mais avançada de operação em plataformas flutuantes, indicadas para jazidas em grandes profundidades.
>
> A Petrobrás detém o recorde mundial de operação em águas profundas com a plataforma flutuante de Marlim 18, cujas pernas têm 918 metros da superfície d'água até o solo do oceano, na bacia de Campos. Essa plataforma foi instalada em 1994, é operada por uma tripulação permanente de 100 pessoas e extrai 80 000 barris de petróleo por dia.

Veja o esquema das plataformas flutuantes da Petrobrás:



• Quantas plataformas flutuantes há na bacia de Campos, sabendo que esse número é raiz da seguinte equação:

$$\frac{x-3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x+5}{6} \qquad (U=\mathbb{Q})$$

5

Estudando as inequações

A partir do século XVI, as sentenças matemáticas passaram a ser escritas com letras de diversos alfabetos representando números desconhecidos.

Assim, surgiram as equações, estudadas na Unidade anterior, que são sentenças matemáticas representadas por igualdades em que um ou mais elementos são desconhecidos.

Consideremos, agora, a seguinte situação:

Em Florianópolis, capital de Santa Catarina, em certo dia, a temperatura máxima registrada foi de 25 °C, enquanto a temperatura mínima foi de 12 °C. Usando a letra x, como podemos representar a temperatura registrada nessa cidade nesse dia, excluindo a temperatura mínima?

Como resposta, podemos dizer:

- ✓ x deve ser um número maior que 12, ou seja, $x > 12$, e
- ✓ x deve ser um número menor ou igual a 25, ou seja, $x \leqslant 25$

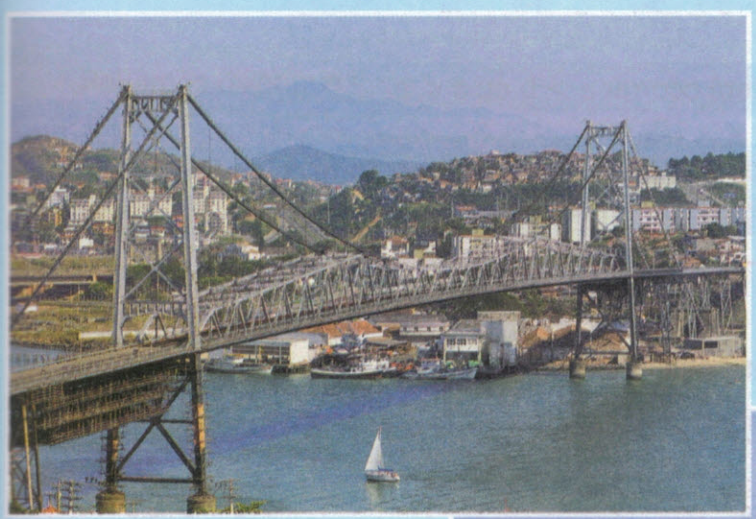
Logo, x deve representar o número 25 ou um número compreendido entre 12 e 25, ou seja, $12 < x \leqslant 25$.

Verificamos que as sentenças $x > 12$, $x \leqslant 25$, $12 < x \leqslant 25$ são desigualdades que apresentam um elemento desconhecido, ou seja, a incógnita x.

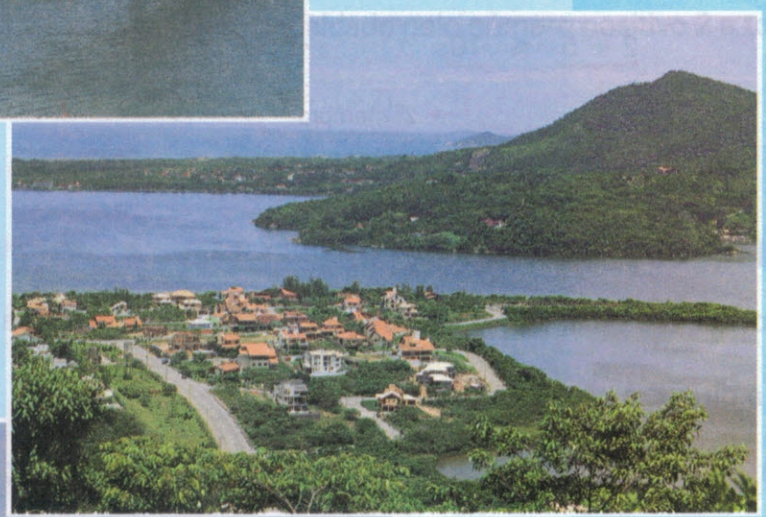
Esse tipo de sentença matemática, que recebe o nome de *inequação*, é objeto do estudo que faremos nesta Unidade.

Você conhece Florianópolis?

Veja alguns de seus pontos turísticos.



Ponte Hercílio Luz



Lagoa da Conceição

Baía Norte

37 DESIGUALDADE

Uma sentença matemática em que se use o símbolo $\neq$ (diferente de) representa uma *desigualdade*.

Exemplos:

1. $2 + 5 \neq 10$ ⟶ a soma de dois e cinco é diferente de dez
2. $3^2 \neq 2^3$ ⟶ o quadrado de três é diferente do cubo de dois
3. $2 \cdot 7 \neq 7^2$ ⟶ o dobro de sete é diferente do quadrado de sete

Você pode verificar que:

Se $a \neq b$, poderá ocorrer $a > b$ ou $a < b$.

Assim:

$\underbrace{2 + 5}_{a} < \underbrace{10}_{b}$ $\qquad$ $\underbrace{3^2}_{a} > \underbrace{2^3}_{b}$ $\qquad$ $\underbrace{2 \cdot 7}_{a} < \underbrace{7^2}_{b}$

À semelhança das igualdades, temos para as desigualdades:

$\underbrace{2 + 5}_{\text{1º membro}} < \underbrace{10}_{\text{2º membro}}$ $\qquad$ $\underbrace{3^2}_{\text{1º membro}} > \underbrace{2^3}_{\text{2º membro}}$

Propriedades

Não valem para as desigualdades as propriedades reflexiva e simétrica, ou seja:

✓ $a > a$ ou $a < a$ são sentenças falsas.

✓ Se $a > b$, então $b > a$ ou se $a < b$, então $b < a$ são sentenças falsas.

Porém, vale para as desigualdades a propriedade transitiva:

✓ Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$ ou se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.

Princípios de equivalência

Já vimos e aplicamos os princípios de equivalência de uma igualdade representada por uma equação.

Veremos agora o que ocorre quando aplicamos os princípios aditivo e multiplicativo em uma desigualdade.

Princípio aditivo

Consideremos a desigualdade $10 > 3$.
Vamos adicionar o número 2 aos dois membros da desigualdade e teremos:

$$\underbrace{10 + 2}_{12} > \underbrace{3 + 2}_{5}$$

Considere, agora, a desigualdade $1 < 10$ e vamos adicionar o número -2 aos dois membros:

$$\underbrace{1 + (-2)}_{-1} < \underbrace{10 + (-2)}_{+8}$$

Podemos dizer que:

Quando adicionamos um mesmo número aos dois membros de uma desigualdade, obtemos uma nova desigualdade de mesmo sentido que a primeira.

Princípio multiplicativo

Consideremos a desigualdade $10 > 3$.
Vamos multiplicar os dois membros dessa desigualdade pelo número positivo 2 e teremos:

$$\underbrace{10 \cdot (+2)}_{20} > \underbrace{3 \cdot (+2)}_{6}$$

Considere agora a desigualdade $-4 < -1$ e vamos multiplicar pelo número positivo 2 os dois membros:

$$\underbrace{-4 \cdot (+2)}_{-8} < \underbrace{-1 \cdot (+2)}_{-2}$$

Podemos dizer que:

Quando multiplicamos os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número positivo, obtemos uma nova desigualdade de mesmo sentido que a primeira.

Consideremos novamente a desigualdade $10 > 3$ e vamos, agora, multiplicar os dois membros dessa desigualdade pelo número negativo -1:

$$\underbrace{10 \cdot (-1)}_{-10} < \underbrace{3 \cdot (-1)}_{-3}$$

Considere novamente a desigualdade $-4 < -1$ e vamos multiplicar os dois membros dessa desigualdade por -1:

$$\underbrace{-4 \cdot (-1)}_{+4} > \underbrace{-1 \cdot (-1)}_{+1}$$

Podemos dizer que:

> Quando multiplicamos os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número negativo, obtemos uma nova desigualdade com sentido invertido.

FIXAÇÃO

1 Isa é mais pesada do que Bel; por isso, quando brincam na gangorra, Isa precisa dar um impulso com as pernas para Bel poder descer. Então Bel resolveu carregar a sua mochila escolar para a gangorra. O que muda na brincadeira delas se Isa também levar a sua mochila, que tem as mesmas coisas e é idêntica à de Bel?

2 Qual é o primeiro membro da desigualdade $5^2 + 2^2 < (5 + 2)^2$?

3 Sendo $x > 180$ e $180 > y$, qual a propriedade da desigualdade que nos permite concluir que $x > y$?

4 Você pode afirmar que se $a > x$, então $x > a$?

5 Sendo $x - 1 < 10$, é correto escrever $x - 1 + 1 < 10 + 1$? Em caso afirmativo, qual o princípio de equivalência que você usou?

6 Dada a desigualdade $x + 3 > 20$, podemos adicionar -3 aos dois membros da desigualdade (princípio aditivo). Simplificando os dois membros, qual a nova desigualdade que vamos obter?

7 Dada a desigualdade $3x < 12$, podemos dizer que $x < 4$? Em caso afirmativo, qual o princípio que aplicamos?

8 Dada a desigualdade $-x < 7$, pelo princípio multiplicativo podemos multiplicar os dois membros por -1. Qual é a nova desigualdade obtida?

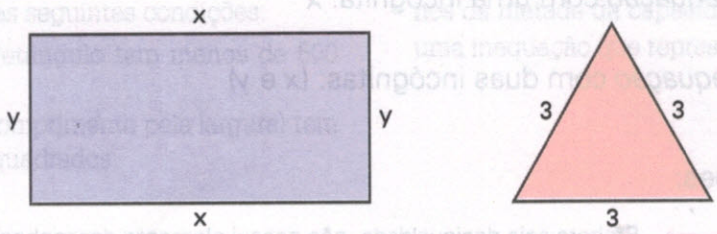
9 Dada a desigualdade $4x > 20$, podemos multiplicar os dois membros da desigualdade por $\frac{1}{4}$, pelo princípio multiplicativo. Qual a nova desigualdade que vamos obter, simplificando os dois membros?

38 INEQUAÇÃO

Consideremos as seguintes situações:

1ª Um retângulo tem x metros de comprimento e y de largura, enquanto um triângulo eqüilátero tem 3 m de lado. Qual a sentença matemática que podemos escrever para expressar o fato de o perímetro do retângulo ser maior que o perímetro do triângulo eqüilátero?

Vamos fazer um desenho de acordo com os dados da situação:



Sendo p_1 o perímetro do retângulo e p_2 o perímetro do triângulo eqüilátero, temos:

$p_1 = 2x + 2y$

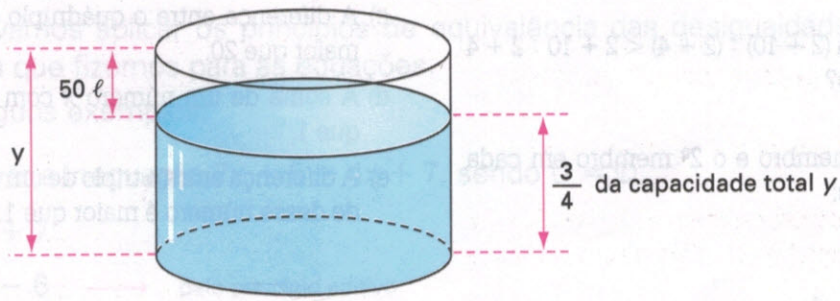
$p_2 = 9$

Como, de acordo com a situação, devemos ter $p_1 > p_2$, a sentença matemática pedida é:

$$2x + 2y > 9$$

2ª Um reservatório, quando totalmente cheio, pode conter *y* litros de água. Se retiramos 50 litros de água, a quantidade que resta é menor que $\frac{3}{4}$ da capacidade total desse reservatório. Qual a sentença matemática que expressa esse fato?

Vamos fazer um desenho de acordo com os dados da situação:



De acordo com os dados da situação e do esboço feito, a sentença matemática pedida é:

$$y - 50 < \frac{3}{4}y$$

Em cada uma das situações apresentadas obtivemos uma sentença matemática com um ou mais elementos desconhecidos (incógnitas) expressa por uma desigualdade.

Toda sentença matemática que contém um ou mais elementos desconhecidos e que representa uma desigualdade é denominada *inequação*.

Assim:

$2x + 14 > 9$ é uma *inequação* com uma incógnita: x

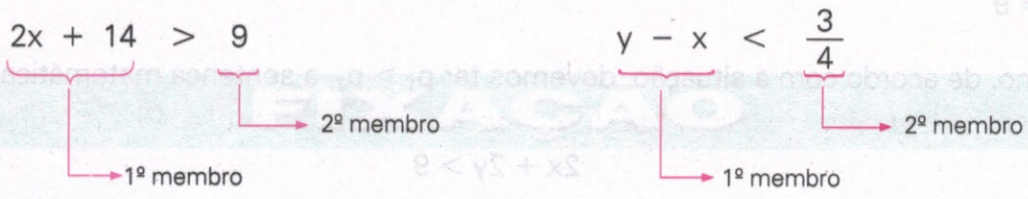
$y - x < \frac{3}{4}$ é uma *inequação* com duas incógnitas: (x e y)

Não são inequações:

$5^2 + 5 > 3^3 - 2$ ⟶ Embora seja desigualdade, não possui elemento desconhecido.

$5x + 1 = 46 - 4x$ ⟶ É uma equação.

Também para as inequações vale a nomenclatura:



FIXAÇÃO

1 A sentença matemática $3x - 2 < 1$ é uma inequação? Justifique sua resposta.

2 Por que a sentença $(2 + 10) : (2 + 4) < 2 + 10 : 2 + 4$ não é uma inequação?

3 Identifique o 1º membro e o 2º membro em cada uma das inequações:

a) $1 - 4x < x + \frac{2}{3}$

b) $\frac{x}{2} - 1 > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$

4 Indicando por x o número de letras de uma palavra, verifique se a inequação $x < 5$ pode ser aplicada à palavra:

a) matemática
b) zero
c) lado
d) área
e) quadrado
f) par

5 Escreva uma inequação para cada uma das seguintes situações:

a) O dobro de um número x aumentado de 7 é maior que 20.

b) Dois terços de um número x é menor que o dobro de um número y.

c) A diferença entre o quádruplo do número x e 1 é maior que 20.

d) A soma de um número x com seus $\frac{4}{5}$ é menor que 1.

e) A diferença entre o triplo de um número x e a metade desse número é maior que 1.

6 A medida do lado de um quadrado é x metros, enquanto os lados de um retângulo medem 7 m e 3 m. Escreva uma inequação que represente o fato de o perímetro do quadrado ser maior que o perímetro do retângulo.

7 Uma caneta custa x reais e uma lapiseira custa y reais. Nessas condições, escreva uma inequação que corresponda a cada uma das seguintes condições:

a) A caneta e a lapiseira juntas custam mais de 10 reais.

b) O preço de três canetas é menor que o preço de 5 lapiseiras.

8 Um terreno retangular tem x metros de comprimento e 30 metros de largura. Escreva uma inequação que represente cada uma das seguintes condições:

a) O perímetro desse retângulo tem menos de 500 metros.

b) A área (produto do comprimento pela largura) tem mais de 300 metros quadrados.

9 Em um recipiente cabem x litros de um líquido. Se retiramos 3 litros de água desse recipiente sobra menos da metade da capacidade do recipiente. Escreva uma inequação que represente esse fato.

INEQUAÇÃO DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Denomina-se *inequação do 1º grau com uma incógnita* toda inequação que, sofrendo transformações oportunas, assume uma das seguintes formas: $ax > b$, $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$, com $a \neq 0$.

Assim, são inequações do 1º grau com uma incógnita:

$3x > 1$ ⟶ incógnita x

$2y < -30$ ⟶ incógnita y

$5t \geqslant 10$ ⟶ incógnita t

$-3p \leqslant -60$ ⟶ incógnita p

Resolver uma inequação do 1º grau com uma incógnita significa determinar os valores do conjunto universo que verificam a desigualdade dessa inequação.

Para isso, vamos aplicar os princípios de equivalência das desigualdades e proceder da mesma maneira que fizemos para as equações.

Vejamos alguns exemplos:

1. Vamos resolver a inequação $7x + 6 > 4x + 7$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

$7x + 6 > 4x + 7$

$7x > 4x + 7 - 6$ ⟶ pelo princípio aditivo

$7x > 4x + 1$

$7x - 4x > 1$ ⟶ pelo princípio aditivo

$3x > 1$

$x > \frac{1}{3}$ ⟶ pelo princípio multiplicativo

Da inequação $x > \frac{1}{3}$, podemos dizer que todos os números racionais relativos maiores que $\frac{1}{3}$ formam o conjunto solução da inequação dada, que representamos por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{1}{3}\right\}$$

2. Resolver a inequação $\frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{4} - \frac{2-3x}{5}$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

$\frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{4} - \frac{2-3x}{5}$

$\frac{10x}{20} \leqslant \frac{5}{20} - \frac{4 \cdot (2-3x)}{20}$

$10x \leqslant 5 - 4 \cdot (2 - 3x)$ ⟶ pelo princípio multiplicativo

$10x \leqslant 5 - 8 + 12x$

$10x \leqslant -3 + 12x$

$10x - 12x \leqslant -3$ ⟶ pelo princípio aditivo

$-2x \leqslant -3$

$2x \geqslant 3$ ⟶ multiplicando por (−1)

$x \geqslant \frac{3}{2}$ ⟶ princípio multiplicativo

Todo número racional maior ou igual a $\frac{3}{2}$ faz parte do conjunto solução da inequação dada, ou seja:

$$S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$$

3. Qual é o conjunto solução da inequação $4 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (3x + 1) < 7$, sendo $U = \mathbb{Q}$?

$4 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (3x + 1) < 7$

$4x - 4 - 6x - 2 < 7$ ⟶ eliminando os parênteses

$-2x - 6 < 7$

$-2x < 7 + 6$ ⟶ pelo princípio aditivo

$-2x < 13$

$2x > -13$ ⟶ multiplicando por (−1)

$x > -\frac{13}{2}$ ⟶ pelo princípio multiplicativo

Todos os números racionais relativos maiores que $-\frac{13}{2}$ formam o conjunto solução da inequação dada, que podemos indicar:

$$S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x > -\frac{13}{2}\right\}$$

4. Verificar se os números racionais −9 e +6 fazem parte do conjunto solução da inequação $5x - 3 \cdot (x + 6) > x - 14$.

Vamos, inicialmente, resolver a inequação dada.

$5x - 3 \cdot (x + 6) > x - 14$
$5x - 3x - 18 > x - 14$
$2x - 18 > x - 14$
$2x > x - 14 + 18$
$2x > x + 4$
$2x - x > 4$
$x > 4$

Vamos, agora, fazer a verificação:

para o número -9, temos: $x > 4 \longrightarrow -9 > 4$ (sentença falsa)
para o número 6, temos: $x > 4 \longrightarrow 6 > 4$ (sentença verdadeira)

Então, o número 6 faz parte do conjunto solução S da equação, enquanto o número -9 não faz parte desse conjunto.

FIXAÇÃO

1 Determine, para cada uma das seguintes inequações, quais números racionais representam uma solução:

a) $x + 15 > 21$
b) $x - 18 < -23$
c) $17 - x < 30$
d) $3x - 6 > 15$
e) $11 - 9x \geqslant 2x$
f) $7x - 28 > 6x - 23$
g) $8x + 19 \leqslant 10x + 11$
h) $13x - 1 < 9x + 1$
i) $3 \cdot (x - 1) - 2x \geqslant 13$
j) $9 \cdot (x - 2) - 5 \cdot (x - 3) < 1$
l) $5 \cdot (x - 2) + 5x < 3 \cdot (x - 15)$
m) $9x - 3 \cdot (x - 2) - 2 > 7$

2 Um retângulo tem 11 cm de largura, enquanto um quadrado tem 11 cm de lado. Quais os valores que o comprimento do retângulo pode assumir para que o perímetro desse retângulo seja maior que o perímetro do quadrado?

3 Em um recipiente cabem x litros de líquido. Se tiramos 2 litros desse líquido, a quantidade que resta no recipiente é menor que $\frac{3}{5}$ da capacidade do recipiente. Monte a inequação correspondente e determine os possíveis valores racionais de x.

4 Sendo $U = \mathbb{Q}$, determine o conjunto solução S de cada uma das seguintes inequações:

a) $\frac{x}{2} - \frac{5}{3} + x < -1$
b) $\frac{x}{6} - \frac{x}{9} > \frac{1}{2}$
c) $\frac{x-1}{2} > 1 + \frac{x}{3}$
d) $\frac{x}{5} > \frac{1}{4} - \frac{2-x}{2}$
e) $\frac{x+1}{4} \leqslant \frac{x-2}{8}$
f) $\frac{x}{2} > 2(1 - x)$
g) $\frac{x+5}{2} \geqslant 3(-x + 1)$
h) $\frac{x-1}{4} > -\frac{1}{6} + \frac{x-2}{3}$
i) $\frac{1+7x}{7} - 1 < \frac{3}{7} - \frac{2(2-x)}{7}$

5 O número 3 pertence ao conjunto solução da inequação $\frac{1}{3}(x - 2) < \frac{x}{2} - 1$?

6 Dados os números -6, -3, 0, 3 e 6, quais deles pertencem ao conjunto solução da inequação $3(2x - 1) < 5x - 1$?

Explorando Álgebra

Vamos analisar a seguinte situação:

Vagner colocou um anúncio nos classificados:

Entre as pessoas que leram o anúncio, estão:

(Adaptado de: *Experiências Matemáticas*, 7ª série, Secretaria de Estado da Educação/CENP, São Paulo, 1994.)

Faça uma análise da situação acima e tire suas conclusões. Em seguida, responda:

1. Qual dos interessados tem a maior quantia para comprar o carro?

2. O que você pode afirmar sobre a quantia que cada um tem?

3. Você poderia afirmar exatamente a quantia de que Kátia dispõe? Por quê? E quantos reais Ricardo tem?

4. Compare as quantias de Ana e Kátia.

5. Observe as inequações:

$\frac{x}{2} > 12\,000$

$2y < 12\,000$

$w = 11\,000$

$\frac{m}{3} < 6\,000$

Compare essas situações com as representações algébricas que você fez. Em seguida, identifique cada possível comprador com uma das sentenças dadas.

6. Qual o único interessado que tem uma situação que pode ser traduzida por uma equação?

RETOMANDO o que aprendeu

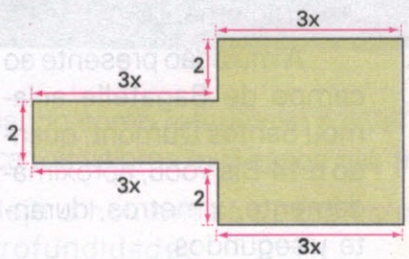
1 Uma indústria se instala em uma cidade *A*. De acordo com os seus estatutos, o número de empregados que residem na cidade *A* deve ser sempre maior que o número de empregados vindos de outras cidades. Sabendo-se que vieram 50 empregados de outras cidades e sendo x o número de empregados que residem na cidade *A*, qual é a inequação que representa as exigências do estatuto dessa indústria?

2 Qual é a inequação que você pode escrever quando multiplica os dois membros da inequação $-5x > 1$ pelo número (-1)?

3 Qual é a solução da inequação $x - 2(x + 1) < \frac{x+3}{5}$ no conjunto $\mathbb{Q}$?

4 Dentre os números -3, 0, 5, 8 e 9, quais pertencem ao conjunto solução da inequação $\frac{x-7}{5} + \frac{x}{10} \leq 1$, sendo $U = \mathbb{Q}$?

5 Quais os valores racionais que podemos atribuir à incógnita x para que o perímetro da figura seja maior que 36 unidades de comprimento?



6 Se você multiplicar a fração $\frac{11}{18}$ por um número racional x e do resultado subtrair $\frac{7}{15}$, você encontrará um valor menor que $\frac{1}{12}$. Determine os valores de x que satisfazem o problema.

7 Considere a inequação $3(x-2) - \frac{7x-1}{2} < \frac{2x-4}{3}$. Quais os números inteiros negativos que fazem parte do conjunto solução dessa inequação?

8 Qual deve ser o maior valor inteiro que x pode assumir para que o perímetro do triângulo da figura 1 seja menor que o perímetro do quadrado da figura 2?

figura 1

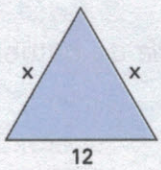
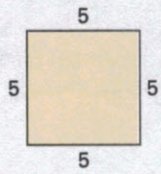


figura 2



9 Sendo $U = \mathbb{N}$, qual é o conjunto solução da inequação $4x - 1 < 2 + 3x$?

10 Determine o conjunto solução da inequação $\frac{3(2x+1)}{2} - \frac{2x+1}{6} > \frac{10(x+2)}{3} - \frac{6x-1}{2}$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

11 Sendo S o conjunto solução da inequação $3x - 7 > 3(-1 + 2x) - 2x$ no conjunto $\mathbb{Q}$, qual das seguintes afirmações é correta?

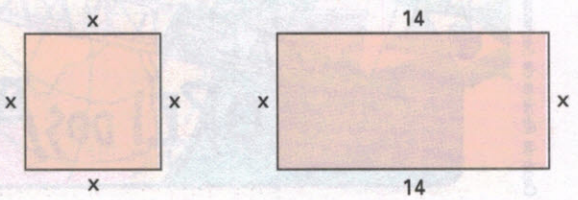
a) $0 \in S$ b) $-3 \in S$ c) $-4 \in S$ d) $-5 \in S$

12 Se você multiplicar 0,5 por um número racional x e ao resultado adicionar 1,75, vai encontrar números maiores que 4. Quais os valores que x pode assumir para satisfazer essa condição?

13 Todos os números racionais negativos são soluções da inequação $-x > 0$. Essa afirmação é verdadeira ou falsa?

14 Sendo dada a inequação $x < \frac{x}{3}$, quais dentre os números -9, -6, 0, 3 e 12 satisfazem essa inequação?

15 Qual é o maior valor inteiro que a incógnita x pode assumir para que o perímetro do quadrado seja menor que o perímetro do retângulo das figuras seguintes?



JORNAIS & REVISTAS

Na revista *Globo Ciência* de outubro de 1996, pode-se ler o artigo "Santos, o gênio que seduziu Paris":

"Alberto Santos Dumont é um daqueles estranhos heróis nacionais que todo brasileiro conhece – mas pouco ou nada se sabe sobre ele. O que a história oficial diz é que ele foi o Pai da Aviação. E que, a bordo do esquálido 14-Bis, movido a um pequeno motor Antoniette de 50 cavalos, sobrevoou o Campo de Bagatelle em Paris, no dia 23 de outubro de 1906 – há exatos 90 anos.

Neto de francês, nasceu em Cabangu, sul de Minas Gerais, cidade que hoje leva seu nome, a 20 de julho de 1873. Estudou no Rio de Janeiro e em Campinas. Depois foi para Paris, onde chegou em 1892, com apenas 19 anos."

Capa da *Revista da Semana*, edição semanal do *Jornal do Brasil*, 6/9/1903.

Para homenageá-lo, vamos recordar seu mais importante feito, através de um problema:

A multidão presente ao campo de Bagatelle aclamou Santos Dumont, quando o 14-Bis voou, aproximadamente, x metros, durante y segundos.

Determine a distância percorrida pelo 14-Bis e o seu tempo de vôo, sabendo que:

$$x + y = 67$$
$$x - 2y = 46$$

Caricatura de Santos Dumont alusiva às experiências de vôos com balões.

O artigo "Jorro milionário", da revista *Veja* de dezembro de 1997, enfoca o recorde da Petrobrás na produção de petróleo.

A explicação para esse fato está nas plataformas espalhadas pela costa brasileira. A Petrobrás é a única empresa no mundo capaz de explorar poços localizados até 2 000 metros abaixo da superfície da água.

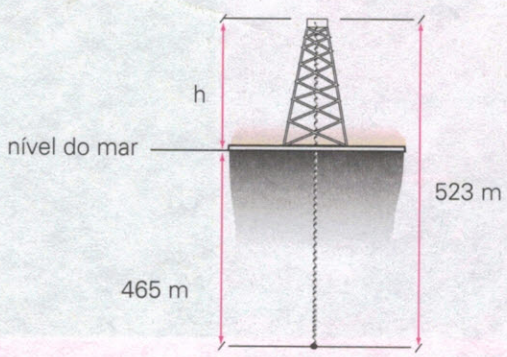
Kino Fotoarquivo

1. Tomando como referencial o nível do mar, use números inteiros positivos ou negativos para indicar os valores expressos nas frases:

a) Hoje o homem só desce ao mar para fazer reparos a até 300 metros de profundidade.

b) Para uma exploração a 1 700 metros, é lançada ao fundo do mar uma base guia, no formato de um funil, por onde as sondas e as brocas começarão a perfurar.

2. Calcule a altura *h* da torre indicada na figura.

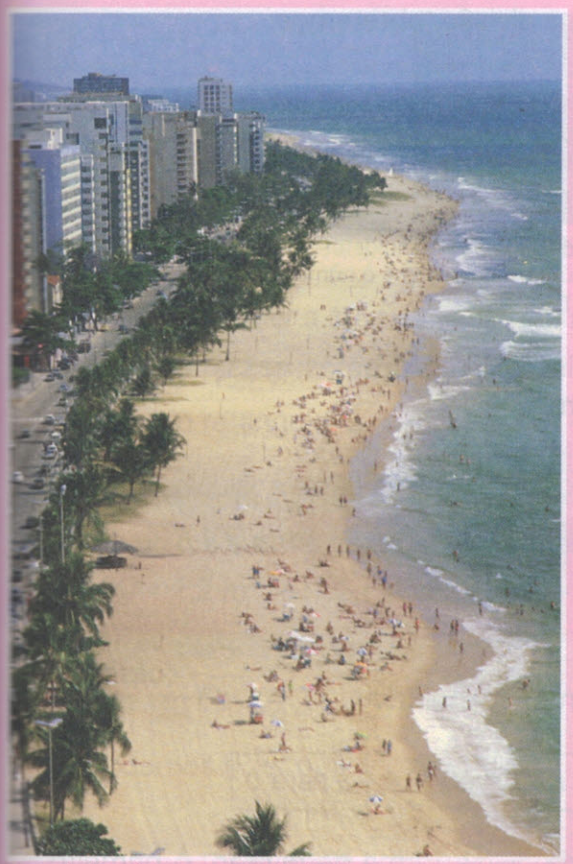


6 Razões e proporções

Analisando os vários censos realizados pelo IBGE no Brasil e tomando como base a população da Região Nordeste, encontramos os números que estão no quadro a seguir:

Comparando os números do quadro, constatamos que a população da região Nordeste praticamente triplicou em 51 anos (de 1940 a 1991). Essa comparação pode ser feita da seguinte maneira:

$$\frac{\text{nº de habitaentes em 1991}}{\text{nº de habitantes em 1940}} = \frac{\text{42 milhões}}{\text{14 milhões}} = 3$$



Praia de Boa Viagem, Recife (PE)

Geralmente, fazemos a comparação entre dois números que expressam grandezas dividindo um pelo outro.

Você conhece o Nordeste?

Ponta Negra, Natal (RN)

São Luís (MA)

Baía de Todos os Santos, Salvador (BA)

40 RAZÃO

Considere a situação a seguir.

Num exame, 1 200 candidatos disputam 400 vagas.

Se compararmos esses dois números através de uma divisão, obteremos:

$1\,200 : 400 = \frac{1\,200}{400} = \frac{3}{1}$ ⟶ Dizemos que há 3 candidatos para cada vaga ou que a razão entre o número de candidatos e o número de vagas é de 3 para 1.

$400 : 1\,200 = \frac{400}{1\,200} = \frac{1}{3}$ ⟶ Dizemos que para cada vaga há 3 candidatos ou que a razão entre o número de vagas e o número de candidatos é de 1 para 3.

Quando comparamos dois números através da divisão, como fizemos nessa situação, o resultado obtido chama-se razão entre esses dois números.

Assim:

Sendo *a* e *b* dois números racionais, com $b \neq 0$, denomina-se *razão entre a e b* ou *razão de a para b* o quociente $\frac{a}{b}$ ou $a : b$.

A razão $\frac{a}{b}$ ou $a : b$ pode ser lida de uma das seguintes maneiras:

razão de *a* para *b* ou *a* está para *b* ou *a* para *b*

Quando escrevemos uma razão na forma fracionária ou na forma de divisão, o primeiro número denomina-se *antecedente* e o segundo número, *conseqüente*.

$\frac{a}{b}$ (a: antecedente; b: conseqüente) ou $a : b$ (a: antecedente; b: conseqüente)

Vejamos alguns exemplos em que utilizamos razões:

1. Numa partida de basquetebol Rafael fez 15 arremessos, acertando 9 deles. Nessas condições:

a) Qual a razão do número de acertos para o número total de arremessos de Rafael?

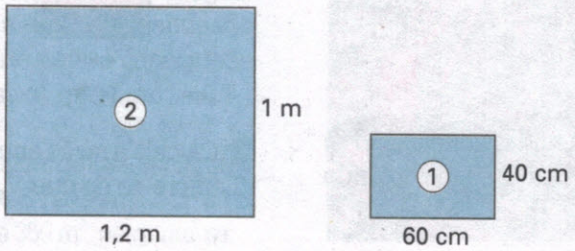
$9 : 15 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ (9: acertos; 15: total) ⟶ 3 para 5, ou seja, para cada 5 arremessos dados, Rafael acertou 3.

b) Qual a razão entre o número de arremessos que Rafael acertou e o número de arremessos que ele errou?

$15 - 9 = 6$ ⟶ número de arremessos errados

$9 : 6 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ⟶ 3 para 2, ou seja, para cada 3 arremessos acertados, Rafael errou 2

2. Calcular a razão da área do primeiro retângulo para a área do segundo retângulo.



Vamos calcular a área de cada retângulo:

área do retângulo ① : $A_{①} = 60\text{ cm} \cdot 40\text{ cm} = 2\,400\text{ cm}^2$

área do retângulo ② : $A_{②} = 1{,}2\text{ m} \cdot 1\text{ m} = 1{,}2\text{ m}^2$

Para calcular a razão entre as áreas, devemos antes passá-las para a mesma unidade. Assim:

$A_{①} = 2\,400\text{ cm}^2$

$A_{②} = 1{,}2\text{ m}^2 = (1{,}2 \cdot 10\,000)\text{ cm}^2 = 12\,000\text{ cm}^2$

razão: $\frac{A_{①}}{A_{②}} = \frac{2\,400}{12\,000} = \frac{1}{5}$ ⟶ 1 para 5, ou seja, a área do retângulo ② é cinco vezes a área do retângulo ①.

Podemos dizer que:

> A razão entre duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que exprimem as suas medidas sempre tomadas na mesma unidade.

3. Numa prova de Matemática, a razão do número de questões que Laura acertou para o número total de questões foi de 3 para 4. Sabendo-se que a prova era composta de 16 questões, quantas questões Laura acertou?

Chamando de x o número de questões certas, e sendo a razão dos acertos para o total de questões 3 para 4, temos:

$$\frac{x}{16} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{x}{16} = \frac{12}{16} \longrightarrow \text{igualando os denominadores}$$

$$x = 12$$

Laura acertou 12 questões.

FIXAÇÃO

1 Escreva, na forma de fração irredutível, a razão entre os números:

a) 1 e 5
b) 3 e 6
c) 6 e 3
d) 10 e 15
e) 100 e 80
f) 48 e 72
g) $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{8}$
h) 3,5 e 7

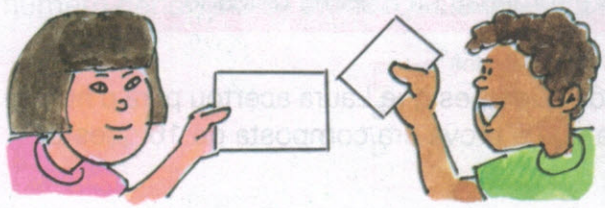
2 Determine a razão entre as medidas abaixo (não se esqueça de reduzir para a mesma unidade, quando necessário):

a) 5 cm e 20 cm
b) 10 cm e 0,5 m
c) 12 ℓ e 15 ℓ
d) 800 g e 2 kg
e) 1 m^2 e 5 000 cm^2
f) 4 cm e 200 km

3 Num teste de 20 questões, Carolina acertou 16. Nessas condições:

a) Qual a razão do número de acertos de Carolina para o número total de questões do teste?
b) Qual a razão do número de erros para o número total de questões do teste?
c) Qual a razão entre o número de acertos e o número de erros de Carolina?

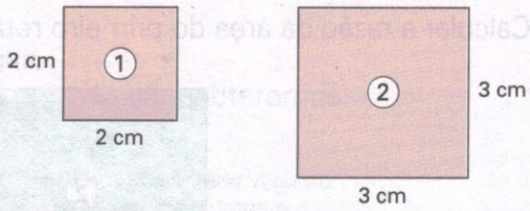
4 Um retângulo *A* tem 10 cm e 15 cm de dimensão e um retângulo *B* tem 8 cm e 12 cm de dimensão. Qual é a razão entre os perímetros dos dois retângulos?



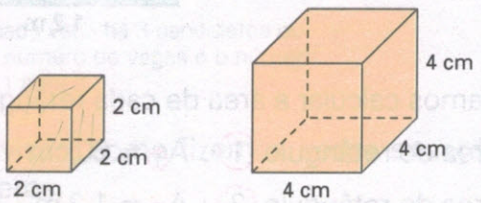
5 Uma mercadoria acondicionada numa embalagem de papelão possui 200 g de peso líquido e 250 g de peso bruto. Qual é a razão do peso líquido para o peso bruto?

6 Observe os quadrados das figuras seguintes e responda:

a) Qual a razão entre o lado do quadrado (1) e o lado do quadrado (2)?
b) Qual a razão entre o perímetro do quadrado (1) e o perímetro do quadrado (2)?
c) Qual a razão entre a área do quadrado (1) e a área do quadrado (2)?

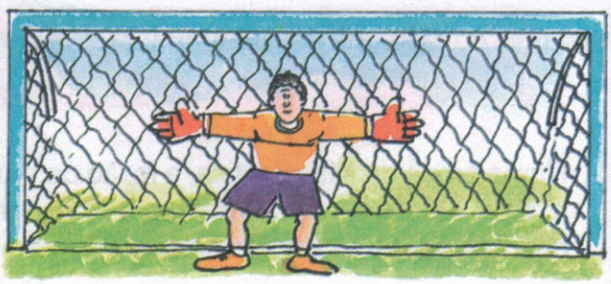


7 Calcule a razão entre os volumes dos cubos abaixo. (Lembre-se de que: V_{cubo} = aresta × aresta × aresta.)



8 Uma equipe de futebol obteve, durante o ano de 1992, 30 vitórias, 18 empates e 12 derrotas. Qual é a razão do número de vitórias para o número total de partidas disputadas?

9 Durante o campeonato de futebol de 1992, uma equipe teve 12 pênaltis a seu favor. Sabendo-se que a razão do número de acertos para o total de pênaltis foi de $\frac{3}{4}$, quantos pênaltis foram convertidos em gol por essa equipe?



10 Sabe-se que a razão entre o número de médicos e o número de habitantes de uma cidade é $\frac{1}{2\,500}$. Se há 30 médicos nessa cidade, qual é a sua população?

11 A razão entre a quantia que gasto e a quantia que recebo como salário por mês é de $\frac{4}{5}$. O que resta coloco em caderneta de poupança. Se neste mês meu salário foi de R$ 840,00, qual a quantia que aplicarei na caderneta de poupança?

12 A razão entre o comprimento da sombra e a altura de uma árvore é de $\frac{2}{3}$. Se a árvore tem 12 m de altura, qual é o comprimento da sombra?

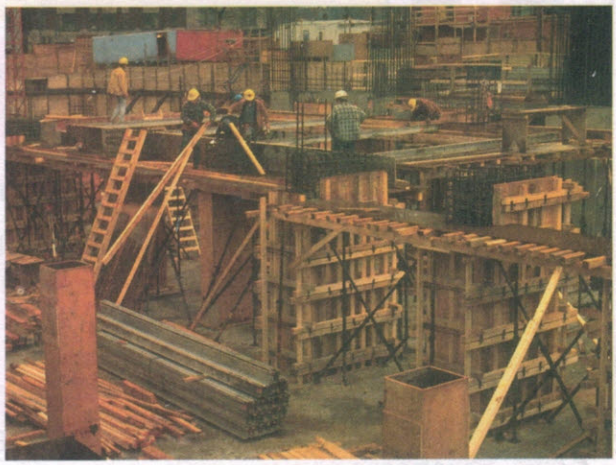
13 A razão entre as idades de um filho e seu pai é de $\frac{2}{5}$. Se o filho tem 24 anos, qual é a idade do pai?

14 Um reservatório com capacidade para 8 m^3 de água, está com 2 000 ℓ de água. Qual a razão da quantidade de água que está no reservatório para a capacidade total do reservatório? (Lembre-se de que 1 $dm^3 = 1\ \ell$.)

15 Numa construção, para cada 10 m^2 de área construída é preciso deixar 2,5 m^2 de área livre. Se, ao término de uma construção, a área construída é de 350 m^2, pergunta-se:

a) Qual a área livre deixada?

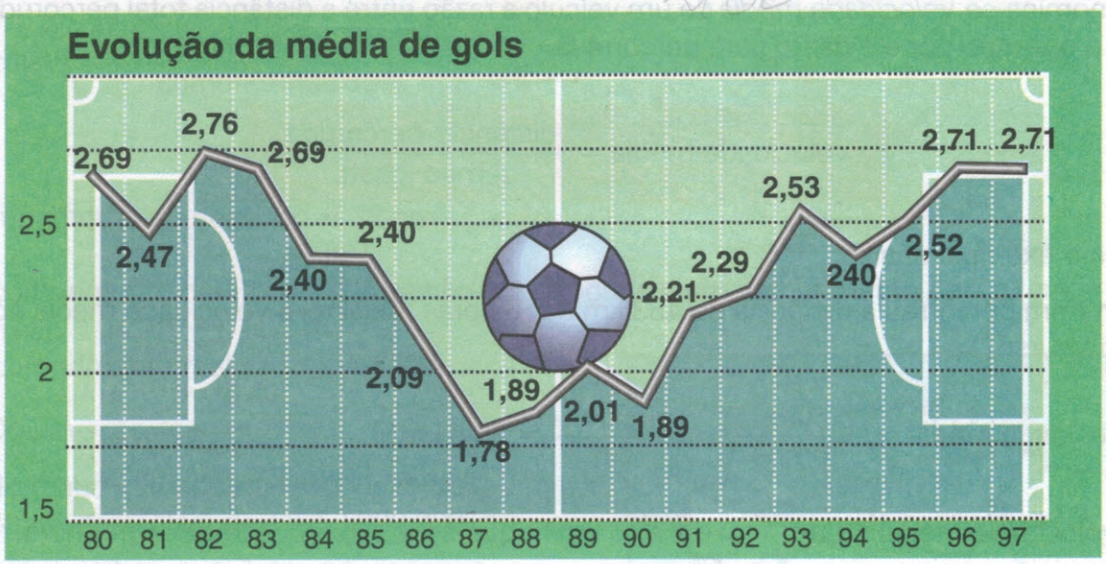
b) Qual a área total da construção?



Corel Stock Photo

Explorando Gráficos

Observe o gráfico com a evolução da média de gols no Campeonato Brasileiro de 1980 a outubro de 1987:



(Fonte: *Folha de S. Paulo*, 20/10/97.)

1. Em qual desses campeonatos a média de gols foi a maior?
2. Em qual desses campeonatos a média de gols foi a menor?
3. Calcule a média de gols nos seguintes qüinqüênios:
   - de 80 a 84.
   - de 90 a 94.
4. Em qual dos qüinqüênios a média de gols foi maior?

41 ALGUMAS RAZÕES ESPECIAIS

Villeneuve vence GP do Brasil

O piloto canadense Jacques Villeneuve conquistou a vitória no Grande Prêmio do Brasil de Fórmula 1, em 1997, ao fazer a volta mais rápida da prova, com a **velocidade média** de 197,089 km/h.

No recorte de jornal está destacado o termo **velocidade média**.

No mapa está destacado o termo **escala**.

Velocidade média

Denomina-se *velocidade média* de um veículo a razão entre a distância total percorrida pelo veículo e o tempo por ele gasto para percorrê-la.

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$$

Veja o exemplo abaixo:

Um trem percorreu a distância de 453 km em 6 horas. Qual foi a velocidade média do trem nesse percurso?

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{453\text{ km}}{6\text{ h}} = 75{,}5\text{ km/h}$$

A velocidade média do trem foi de 75,5 km/h, que se lê: 75,5 quilômetros por hora.

Escala

Uma das aplicações da razão entre duas grandezas se encontra na escala de redução ou escala de ampliação, conhecidas simplesmente como *escala*.

Quando queremos representar com um desenho certos objetos (móveis, automóveis etc.), a planta de uma casa, a maquete de um prédio ou fazer um mapa, usamos uma escala.

Denomina-se escala de um desenho a razão entre o comprimento considerado no desenho e o correspondente comprimento real, medidos com a mesma unidade. Em geral, utilizamos as medidas em centímetro para determinar uma escala.

$$\text{escala} = \frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real}}$$

Vejamos alguns exemplos de situações em que aplicamos escalas.

1. Em um mapa, a distância entre duas cidades é de 3 cm. Sabendo-se que a distância real entre as cidades é de 30 km, qual a escala utilizada no mapa?

comprimento no desenho: 3 cm

comprimento real: 30 km = (30 · 100 000) cm = 3 000 000 cm

$$\text{escala} = \frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real}} = \frac{3}{3\,000\,000} = \frac{1}{1\,000\,000}$$

A escala utilizada foi de $\frac{1}{1\,000\,000}$ ou 1 : 1 000 000.

A escala de 1 : 1 000 000 significa que 1 cm no desenho corresponde a 1 000 000 cm no real, ou seja, a 10 km no real.

2. Ao desenhar a sua sala de aula, Paula traçou um segmento de 12 cm, que corresponde ao comprimento da sala. Sabendo-se que a escala utilizada foi 1 : 60, qual o comprimento real da sala?

$$\text{escala} = \frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real}} \Rightarrow \frac{1}{60} \overset{\times 12}{=} \frac{12}{720}$$

comprimento no desenho = 12 cm

O comprimento de 12 cm no desenho corresponde a um comprimento de 720 cm = 7,20 m no real.

O comprimento real da sala é 7,2 m.

Observação:

No mapa utilizado na introdução deste capítulo, a escala é de 1 : 50 000 000.

Isto significa que 1 cm no desenho corresponde a 50 000 000 cm no real, ou seja, a 500 km no real.

Assim, se a distância entre duas cidades no mapa é de 2,5 cm, a distância real é de 2,5 · 500 = 1 250 km.

Densidade de um corpo

Mais uma aplicação de razão entre duas grandezas é no cálculo do valor da *densidade* de um corpo. Assim, densidade de um corpo é a razão entre a massa desse corpo e o seu volume, ou seja:

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa do corpo}}{\text{volume do corpo}}$$

Vejamos um exemplo:

Uma estátua de bronze tem 140 kg de massa e seu volume é de 16 dm^3. Qual é a sua densidade?

De acordo com os dados do exemplo, temos:

$$\text{densidade} = \frac{140\ kg}{16\ dm^3} = 8{,}75\ kg/dm^3$$

Logo, a densidade da estátua é de 8,75 kg/dm^3.

Densidade demográfica

O cálculo da *densidade demográfica* de uma região é também uma aplicação de razão entre duas grandezas. Ela expressa o número de habitantes por quilômetro quadrado dessa região. Assim, densidade demográfica de uma região é a razão entre o número de seus habitantes e a área ocupada pela região, ou seja:

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{área}}$$

O estado do Tocantins, a mais nova unidade da Federação, ocupa uma área aproximada de 280 000 km^2. De acordo com o censo realizado em 1991, o estado do Tocantins tinha uma população, aproximada, de 920 000 habitantes. Qual era, então, a densidade demográfica desse estado?

De acordo com os dados do exemplo, temos:

$$\text{densidade demográfica} = \frac{920\ 000\ hab}{280\ 000\ km^2} =$$

$$\cong 3{,}2\ hab/km^2$$

Logo, a densidade demográfica do estado do Tocantins era de 3,2 hab/km^2, aproximadamente.

FIXAÇÃO

1 Um automóvel percorreu 400 km em 5 horas. Qual foi a velocidade média desse automóvel no percurso?

2 A distância entre São Paulo e Brasília é 1 150 km. Qual a velocidade média de um ônibus que faz esse percurso em:

a) 15 horas?

b) 12 horas e 30 minutos? (Lembre-se de que 12 horas e 30 minutos = 12,5 h.)

3 A distância entre a Terra e o Sol é de, aproximadamente, 150 000 000 km; a luz do Sol, para atingir a Terra, leva em torno de 500 segundos. Qual é a velocidade da luz, no vácuo?

4 Se um veículo se deslocar com uma velocidade média de 95 km/h, quantos quilômetros ele irá percorrer em:

a) 1 hora?

b) 2 horas?

c) 2 horas e meia?

5 Um velocista correu os 100 metros rasos de uma competição em 12 segundos. Qual foi, aproximadamente, a velocidade média desse velocista nessa prova?

Corel Stock Photo

6 Qual é a escala de um desenho em que um comprimento de 3 m está representado por um comprimento de 5 cm?

7 A distância entre São Paulo e Rio de Janeiro é de, aproximadamente, 408 km. Qual é a escala de um mapa onde essa distância é representada por 20,4 cm?

8 De acordo com o *Anuário Estatístico do Brasil*, o quadro seguinte apresenta o número aproximado de habitantes e a área, em quilômetros quadrados, de cada uma das grandes regiões brasileiras (1980/1990). Determine, então, a densidade demográfica de cada região:

Região	População	Área Aproximada (em km^2)
Norte	10 257 000	3 860 000
Nordeste	42 470 000	1 560 000
Sudeste	62 660 000	930 000
Sul	22 117 000	580 000
Centro-Oeste	9 412 000	1 610 000

9 A largura de um determinado automóvel é 2 m. Uma miniatura desse automóvel foi construída utilizando-se uma escala de 1 : 40. Qual a medida, em centímetros, da largura da miniatura?

10 Sabe-se que um bloco maciço de mármore tem 67,5 kg de massa e ocupa um volume de 25 dm^3. Qual a densidade desse bloco de mármore?

11 Uma pedra preciosa tem 67,2 g de massa e ocupa um volume de 16 cm^3. Qual a densidade dessa pedra preciosa?

12 Aílton e Patrícia foram correr em uma pista de *cooper*. Aílton percorreu os 1 800 m da pista em 5 minutos e Patrícia percorreu essa mesma distância em 6 minutos. Pergunta-se:

a) Quais as velocidades médias em metros por segundo, de Aílton e Patrícia?

b) Se ambos partirem juntos, após quanto tempo eles se cruzarão na pista?

Explorando Gráficos

Observe o gráfico com a comparação entre as velocidades de um trem de 1900 e outro de 1990:

1900 — velocidade média do trem expresso francês: 86,4 km/h

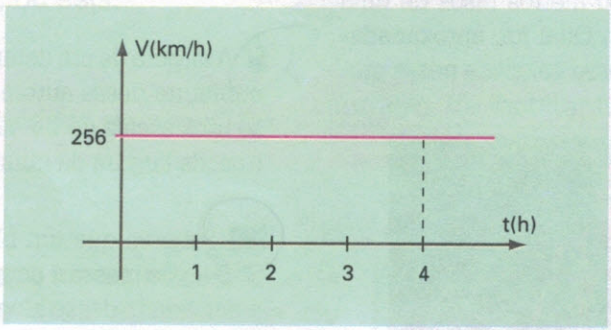
1990 — velocidade média do trem *Grande Vitesse* francês (TGV): 256 km/h

(Fonte: Nosso Tempo – A Cobertura Jornalística do Século – *Jornal da Tarde*)

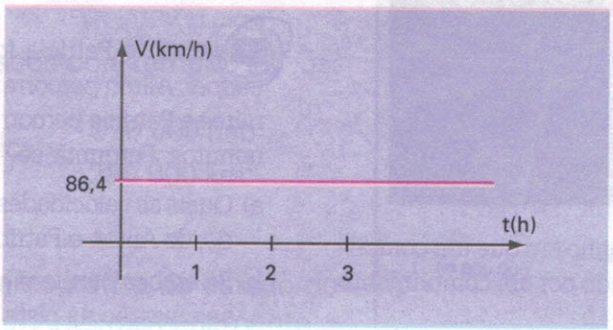
1. Sabendo que a velocidade média é dada pela razão entre o espaço percorrido e o tempo gasto para percorrê-lo, calcule o número de quilômetros percorridos por esses trens num intervalo de 2 horas.

2. Se o trem expresso francês precisasse percorrer, aproximadamente, 270 quilômetros em 1 hora, em quantas vezes deveria aumentar a sua velocidade?

3. O gráfico de linha mostra a relação da velocidade do trem *Grande Vitesse*, em km/h, com o tempo, em horas. Escreva como se calcula a área do retângulo pintado sob a linha do gráfico. Essa área representa o valor numérico do espaço percorrido pelo trem no período considerado.



4. Com base no gráfico do trem expresso francês, calcule o espaço que ele percorre, com velocidade constante, durante as três primeiras horas.



As razões escritas na forma percentual

Além da forma fracionária e da forma decimal, uma razão também pode ser representada na *forma percentual*, com o símbolo %.

Podemos dizer que:

> Toda razão $\frac{a}{b}$, na qual b = 100, pode ser escrita na forma de *porcentagem*.

Assim, temos:

$$\frac{30}{100} = 0{,}30 = 30\%$$

- $\frac{30}{100}$: forma fracionária
- 0,30: forma decimal
- 30%: forma percentual ou forma de porcentagem

No dia 04/06/95, as seleções de futebol do Brasil e da Suécia jogaram em Birminghan, na Inglaterra, na disputa de um torneio quadrangular. O jornal *Folha de S. Paulo* apresentou os dados estatísticos do jogo, reunidos no quadro a seguir:

Brasil		Suécia
445	Passes certos	210
84	Passes errados	77
4	Recuos	10
36	Bolas perdidas	53
15	Faltas cometidas	12
4	Finalizações certas	1
11	Finalizações erradas	3
8	Lançamentos certos	3
13	Lançamentos errados	6
9	Escanteios conquistados	3
4	Impedimentos	1

Podemos tirar as seguintes conclusões:

✓ Dos 529 passes trocados pelos jogadores brasileiros, 445 foram certos, o que nos dá a razão de 445 para 529, representada na forma de 84%.

✓ O Brasil finalizou 15 vezes, das quais 4 foram em direção ao gol. Chegamos, assim, à razão de 4 para 15, representada na forma de 27%.

Essas informações caracterizam, respectivamente, eficiência e aproveitamento da seleção brasileira, e podem ser apresentadas de forma ágil pelos quadros:

Eficiência	
84%	dos passes foram certos

Aproveitamento	
27%	das finalizações foram certas

Para representar uma razão na forma percentual, temos dois casos a considerar:

1º caso: O conseqüente b é um fator natural de 100.

$$\frac{1}{2} \overset{\times 50}{=} \frac{50}{100} = 50\%$$

(razão equivalente de conseqüente igual a 100)

$$\frac{4}{5} \overset{\times 20}{=} \frac{80}{100} = 80\%$$

(razão equivalente de conseqüente igual a 100)

2º caso: O conseqüente b não é um fator natural de 100.

$$\frac{3}{8} = \underbrace{0{,}375}_{\text{forma decimal de } \frac{3}{8}} = \frac{0{,}375 \cdot 100}{100} = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\%$$

$$\frac{7}{12} = \underbrace{0{,}583}_{\text{forma decimal aproximada de } \frac{7}{12}} = \frac{0{,}583 \cdot 100}{100} = \frac{58{,}3}{100} = 58{,}3\% \text{ (aproximadamente)}$$

Uma razão escrita na forma percentual pode ser representada também na forma fracionária e na forma decimal.

Vejamos alguns exemplos:

1. $35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ ⟶ forma fracionária

2. $35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$ ⟶ forma decimal

3. $160\% = \frac{160}{100} = \frac{8}{5}$ ⟶ forma fracionária

4. $160\% = \frac{160}{100} = 1{,}60$ ⟶ forma decimal

FIXAÇÃO

1 Escreva na forma de porcentagem cada uma das seguintes razões:

a) $\frac{51}{100}$

b) $\frac{39}{100}$

c) $\frac{6}{100}$

d) $\frac{12,7}{100}$

2 Escreva na forma percentual cada uma das seguintes razões:

a) $\frac{11}{20}$

b) $\frac{7}{5}$

c) $\frac{21}{10}$

d) $\frac{5}{10}$

e) $\frac{2}{3}$

f) $\frac{3}{4}$

g) $\frac{13}{15}$

h) $\frac{1}{5}$

3 Escreva na forma percentual cada um dos seguintes números decimais:

a) 0,03

b) 0,35

c) 1,42

d) 0,62

e) 0,045

f) 0,225

4 As razões a seguir estão escritas na forma percentual. Escreva-as na forma de números fracionários.

a) 55%

b) 8%

c) 10%

d) 120%

e) 0,4%

f) 7,5%

5 As seguintes razões estão escritas na forma percentual. Vamos escrevê-las na forma de número decimal:

a) 81%

b) 165%

c) 4,5%

d) 11,1%

Calculando a porcentagem

Nos exemplos a seguir vamos usar a razão escrita na forma percentual, ou seja, vamos calcular porcentagens:

1. Um desconto de 7 mil reais sobre um preço de 20 mil reais, representa quantos por cento?

Inicialmente, temos a razão 7 para 20, ou seja, $\frac{7}{20}$.

Usando razões equivalentes, temos:

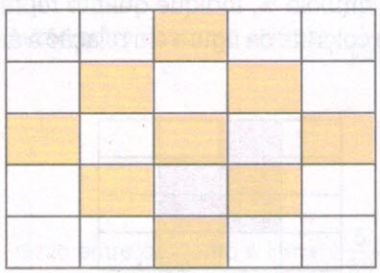
$$\frac{7}{20} \overset{\times 5}{=} \frac{35}{100} = 35\%$$

Usando a forma de número decimal, temos:

$$\frac{7}{20} = 0,35 = \frac{35}{100} = 35\%$$

Como podemos ver, 7 mil reais representam 35% de desconto.

2. Na figura ao lado, a área da região colorida representa quantos por cento da área total da figura?



A área total da figura é de 25 unidades e a área da região colorida é de 9 unidades. Temos, então, a razão 9 para 25, ou seja, $\frac{9}{25}$.

$$\frac{9}{25} \overset{\times 4}{=} \frac{36}{100} = 36\%$$

Como podemos ver, a área da região colorida representa 36% da área da figura.

3. De acordo com o jornal *Folha de S. Paulo*, no jogo Brasil × Suécia, realizado em Birminghan no dia 04/06/95, a equipe brasileira chutou 15 vezes em direção ao gol da Suécia, tendo acertado 4 vezes. De quantos por cento foi o índice de finalizações certas da equipe brasileira, nesse jogo?

Inicialmente, temos a razão 4 para 15, ou seja, $\frac{4}{15}$. Como 15 não é fator natural de 100, fazemos:

$$\frac{4}{15} = 0{,}266 = \frac{0{,}266 \cdot 100}{100} = \frac{26{,}6}{100} = 26{,}6\% \text{ (aproximadamente)}$$

Como podemos ver, o índice de aproveitamento foi de 26,6%, aproximadamente.

4. Um lucro de R$ 3,00 sobre um preço de venda de R$ 120,00 representa quantos por cento?

Temos a razão 3 para 120, ou seja, $\frac{3}{120}$.

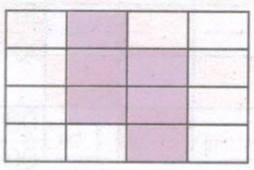
$$\frac{3}{120} = \frac{1}{40} = 0{,}025 = \frac{0{,}025 \cdot 100}{100} = \frac{2{,}5}{100} = 2{,}5\%$$

Como podemos verificar, R$ 3,00, nesse caso, representam 2,5% de lucro.

FIXAÇÃO

1 Numa prova de vestibular foram dadas 40 questões. Cristina acertou 34 dessas questões. O número de acertos de Cristina representa quantos por cento do número total de questões?

2 Usando o símbolo %, indique quanto representa a área da parte colorida da figura em relação à área total da figura.



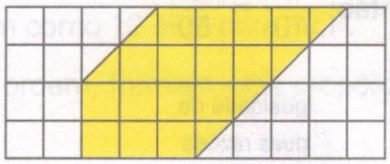
3 Três minutos representam quantos por cento de 1 hora?

4 Num campeonato de futebol, realizado em 1990 na Itália, 12 dos 52 jogos disputados terminaram empatados. O número de jogos empatados representa quantos por cento, aproximadamente, do número total de jogos?

5 (PUC-MG) Dos 13 200 candidatos inscritos no último vestibular da PUC-MG, verificou-se que 1 400 deles tinham menos de 18 anos. Quantos por cento dos candidatos desse vestibular tinham 18 anos ou mais?

6 Um fichário tem 25 fichas numeradas. Sabe-se que 13 dessas fichas têm números ímpares e as fichas restantes têm números pares. Nessas condições, as fichas que têm números pares representam quantos por cento das fichas numeradas do fichário?

7 A área da região colorida representa quantos por cento da área do retângulo?



42 PROPORÇÃO

Vamos analisar a seguinte situação:

Um posto de gasolina oferece um desconto de R$ 1,00 para cada 10 litros completos de gasolina. Se uma pessoa colocar 50 litros de gasolina no carro, que desconto irá obter?

Delfim Martins/Pulsar

Com os dados do problema, podemos montar uma tabela:

Litros	Desconto (em R$)
10	1
20	2
30	3
40	4
50	5

→ o desconto será de R$ 5,00

Nesta tabela, podemos destacar:

Litros	Desconto (em R$)
10	1
20	2
30	3
40	4
50	5

→ razão entre desconto e litros: $\frac{1}{10}$

→ razão entre desconto e litros: $\frac{5}{50}$

Verificamos que as razões $\frac{1}{10}$ e $\frac{5}{50}$ são iguais.

Então: $\frac{1}{10} = \frac{5}{50}$

igualdade de duas razões

Uma sentença matemática que expressa uma igualdade entre duas razões é chamada *proporção*.

Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Vejamos estes exemplos:

1. Admite-se, como ideal, numa cidade, a existência de 1 médico para cada 5 000 habitantes. Nessas condições, quantos médicos deverá ter uma cidade com 50 000 habitantes?

De acordo com o problema, temos a tabela:

Nº de habitantes	Nº de médicos
5 000	**1**
10 000	2
15 000	3
20 000	4
25 000	5
30 000	6
35 000	7
40 000	8
45 000	9
50 000	**10**

→ razão entre o número de médicos e o número de habitantes: $\frac{1}{5\,000}$

→ razão entre o número de médicos e o número de habitantes: $\frac{10}{50\,000} = \frac{1}{5\,000}$

A cidade deverá ter 10 médicos.

Verificamos que as razões $\frac{1}{5\,000}$ e $\frac{10}{50\,000}$ são iguais.

Então, $\frac{1}{5\,000} = \frac{10}{50\,000}$ é uma proporção.

2. Sejam os números 6, 9, 12 e 18. Nessa ordem, vamos calcular:

A razão do 1º para o 2º: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

A razão do 3º para o 4º: $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

Observando que a razão do primeiro para o segundo é igual à razão do terceiro para o quarto, podemos escrever:

$6 : 9 = 12 : 18$ ou $\frac{6}{9} = \frac{12}{18}$ (Lê-se: 6 está para 9 assim como 12 está para 18.)

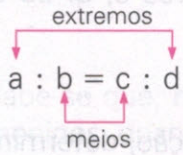
Neste caso, dizemos que os números 6, 9, 12, 18, nessa ordem, formam uma proporção.

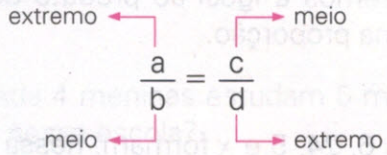
De um modo geral:

> Quatro números racionais *a*, *b*, *c* e *d*, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando:
>
> $a : b = c : d$ ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
>
> Lê-se: *a* está para *b* assim como *c* está para *d*

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:

- Os números *a*, *b*, *c* e *d* são denominados *termos* da proporção.
- O primeiro e o quarto termos são denominados *extremos*, enquanto o segundo e o terceiro são denominados *meios*.





43 PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS PROPORÇÕES

Considerando as proporções vistas no capítulo anterior, temos:

- $\frac{800}{10} = \frac{4\,000}{50}$

produto dos extremos: $800 \cdot 50 = 40\,000$
produto dos meios: $10 \cdot 4\,000 = 40\,000$
$\Big\}$ $800 \cdot 50 = 10 \cdot 4\,000$

Nos exemplos, observamos que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

- $\frac{6}{9} = \frac{12}{18}$

produto dos extremos: $6 \cdot 18 = 108$
produto dos meios: $9 \cdot 12 = 108$
$\Big\}$ $6 \cdot 18 = 9 \cdot 12$

Esse fato se repete sempre que tomamos uma proporção.
Daí, podemos definir a *propriedade fundamental das proporções*.

De modo geral, em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios e vice-versa.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \underbrace{a \cdot d}_{\text{produto dos extremos}} = \underbrace{b \cdot c}_{\text{produto dos meios}}$$

Podemos utilizar a propriedade fundamental para resolver diversos problemas. Vejamos alguns exemplos:

1. Usando a propriedade fundamental, verificar se os números 5, 8, 20 e 32 formam, nessa ordem, uma proporção.

produto dos extremos: $5 \cdot 32 = 160$
produto dos meios: $8 \cdot 20 = 160$
$\Rightarrow 5 \cdot 32 = 8 \cdot 20 \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{20}{32}$

Como o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, os números 5, 8, 20 e 32 formam, nessa ordem, uma proporção.

2. Sabendo que os números 6, 24, 5 e x formam, nessa ordem, uma proporção, determinar o valor de x.

$\frac{6}{24} = \frac{5}{x}$ ⟶ os números 6, 24, 5 e x formam uma proporção

$6x = 5 \cdot 24$ ⟶ aplicando a propriedade fundamental

$6x = 120$ ⟶ resolvendo a equação em x

$x = \frac{120}{6} \longrightarrow x = 20$

O valor de x é 20.
O número 20 assim determinado chama-se *quarta proporcional* dos números 6, 24 e 5.
Assim, dados três números racionais a, b e c, denomina-se *quarta proporcional* desses números um número x, tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

3. Resolver a proporção $\frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{\frac{1}{4}}{x}$.

$\frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{\frac{1}{4}}{x}$ ⟶ aplicando a propriedade fundamental

$\frac{2}{3} \cdot x = 5 \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{2x}{3} = \frac{5}{4}$ → resolvendo a equação

$\frac{8x}{12} = \frac{15}{12}$

$8x = 15$

$x = \frac{15}{8}$

4. Calcular o valor de *x* na proporção $\frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{2}$ (com $x \neq 2$).

$\frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{2}$ → aplicando a propriedade fundamental

$2 \cdot (x + 1) = 1 \cdot (x - 2)$

$2x + 2 = x - 2$ → resolvendo a equação

$2x - x = -2 - 2$

$x = -4$

5. Sabe-se que, numa escola, para cada 4 meninas estudam 5 meninos. Se na escola há 580 meninos, quantos alunos estudam nessa escola?

$\frac{4}{5} = \frac{x}{580}$

$5 \cdot x = 4 \cdot 580$ → aplicando a propriedade fundamental das proporções

$5x = 2\,320$ → resolvendo a equação

$x = \frac{2\,320}{5}$

$x = 464$

$464 + 580 = 1\,044$ → total de alunos

Estudam nessa escola 1 044 alunos.

6. Numa maquete a altura de um edifício é de 80 cm. Qual a altura real do prédio, sabendo-se que a maquete foi construída na escala 1 : 40?

$\frac{1}{40} = \frac{80}{x}$

$1 \cdot x = 40 \cdot 80$ → aplicando a propriedade fundamental

$x = 3\,200 \text{ cm} = 32 \text{ m}$ → resolvendo a equação

A altura do prédio é de 32 m.

FIXAÇÃO

1 Aplicando a propriedade fundamental, verifique se os seguintes pares de razões formam uma proporção:

a) $\frac{2}{3}$ e $\frac{6}{9}$

b) $\frac{1}{5}$ e $\frac{10}{50}$

c) $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{10}$

d) $\frac{4}{10}$ e $\frac{6}{4}$

e) $\frac{3}{16}$ e $\frac{4}{6}$

2 Verifique se os números abaixo formam, na ordem em que aparecem, uma proporção:

a) 4, 6, 20 e 30

b) 1, 6, 3 e 12

c) 1,2; 2; 3 e 5

d) $\frac{1}{2}$, 80, $\frac{1}{4}$, 40

3 Determine o valor de x, sabendo que 5, 8, 12 e x formam, nessa ordem, uma proporção.

4 Determine a quarta proporcional dos números:

a) 6, 10 e 15

b) 20, 12 e 5

c) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$

d) 0,4; 0,6 e 1,2

5 Calcule o valor de x nas proporções:

a) $\frac{x}{3} = \frac{8}{12}$

b) $\frac{2}{x} = \frac{14}{21}$

c) $\frac{1}{6} = \frac{5}{x}$

d) $\frac{12}{x} = \frac{3}{2}$

e) $\frac{2x}{3} = \frac{15}{2}$

f) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{x}$

g) $\frac{1}{3} = \frac{x-1}{x+1}$

h) $\frac{x+5}{x+8} = \frac{4}{5}$

6 Para ser aprovado em um teste, Antônio tem de acertar no mínimo 60% da prova, ou seja, a razão entre o número de acertos e o número total de questões tem de ser igual a $\frac{6}{10}$. Sabendo-se que o teste tem 15 questões, quantas questões Antônio terá de acertar para ser aprovado?

7 Numa escala de 1 : 50, qual o comprimento real, em metros, correspondente ao comprimento de 8 cm?

8 Um automóvel, com uma velocidade média de 65 km/h, percorreu certa distância em 4 h. Qual foi a distância percorrida?

9 Numa receita de bolo, está escrito que são necessários 2 ovos para cada 0,5 kg de farinha utilizada. Quantos ovos serão necessários, se forem utilizados 2 kg de farinha?

Marcus Cappellano

10 A razão entre a altura de Tarcísio e a sua sombra, em determinada hora do dia, é de 3 para 2. Se a sombra mede 1,2 m, qual a altura de Tarcísio?

11 Sabe-se que 1 está para x assim como $1 + \frac{1}{2}$ está para $1 - \frac{1}{2}$. Nestas condições, qual o valor de x?

12 Dados os números 3, 5, 12 e 20, verifique se na ordem em que aparecem eles formam uma proporção.

a) 3, 5, 12 e 20

b) 3, 5, 20 e 12

c) 5, 3, 20 e 12

d) 3, 12, 5 e 20

13 Para fazer um refresco, misturamos suco concentrado com água na razão de 3 para 5. Nessas condições, 9 copos de suco concentrado devem ser misturados com quantos copos de água?

14 Numa cafeteira elétrica, vem indicado que, para cada medida de pó de café se obtêm 3 xícaras de café. Quantas medidas são necessárias para se obter 12 xícaras de café?

Marinez Maravalhas Gomes

15 Uma sala retangular, de 8 m por 6 m, deve ser representada num desenho, utilizando-se para isso uma escala de 1 : 160. Quais serão as dimensões da sala no desenho?

16 A razão entre a velocidade de dois móveis, A e B, é de $\frac{3}{8}$. Calcule a velocidade do móvel A quando a velocidade do móvel B for igual a 20 m/s.

17 A razão entre as massas de enxofre e de ferro que se combinam para formar a substância sulfeto de ferro é de $\frac{4}{7}$. Calcule:

a) a massa de ferro que deve se combinar com 32 g de enxofre para formar o sulfeto de ferro.

b) a massa de enxofre que deve se combinar com 1,12 g de ferro para formar o sulfeto de ferro.

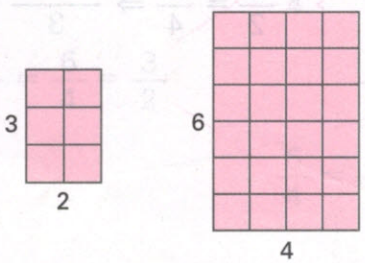
44 OUTRAS PROPRIEDADES DAS PROPORÇÕES

Vamos estudar duas propriedades das proporções que são bastante utilizadas na resolução de problemas:

1ª propriedade

Consideremos a seguinte proporção: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$.

Geometricamente, temos:



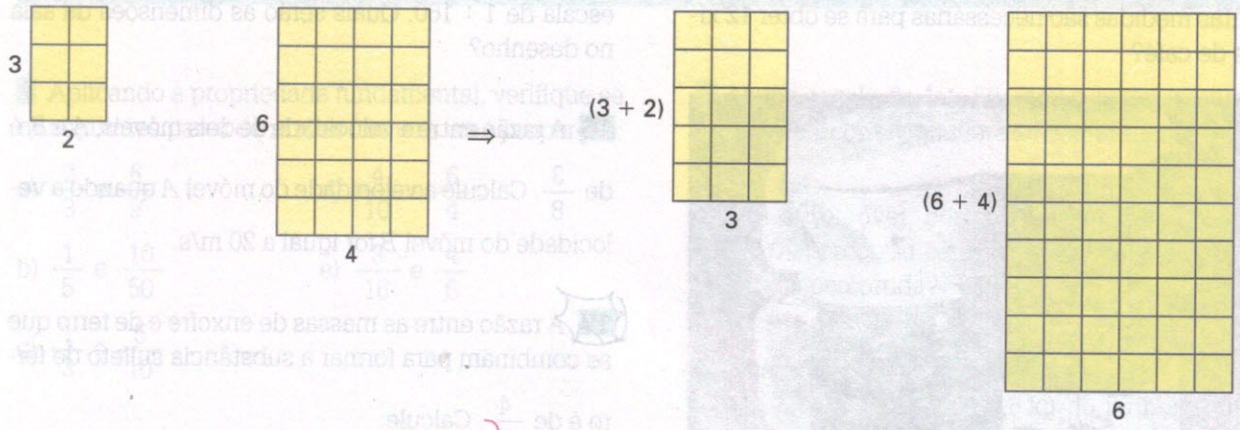
Observe, agora, as novas proporções que podemos obter partindo da proporção dada.

- $\frac{3}{2} \longrightarrow \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$

  $\frac{6}{4} \longrightarrow \frac{6+4}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{3+2}{3} = \frac{6+4}{6}$

Geometricamente, temos:

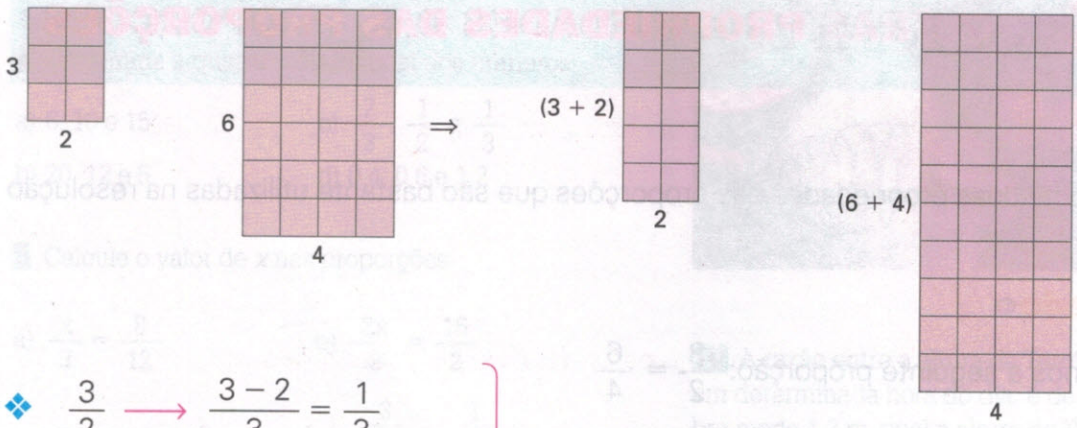


❖ $\frac{3}{2} \longrightarrow \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$

$\frac{6}{4} \longrightarrow \frac{6+4}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{3+2}{2} = \frac{6+4}{4}$

Geometricamente, temos:

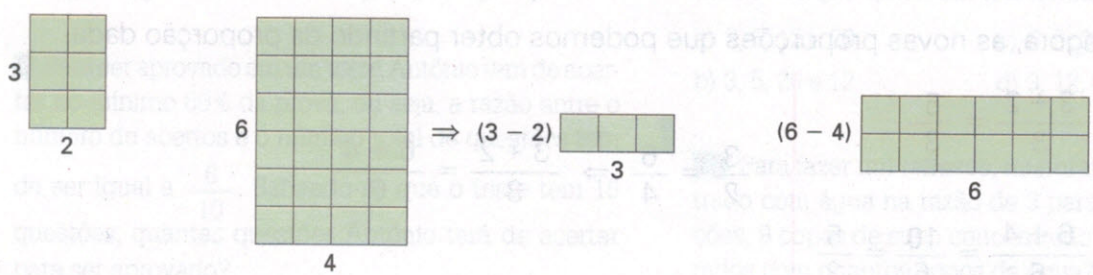


❖ $\frac{3}{2} \longrightarrow \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$

$\frac{6}{4} \longrightarrow \frac{6-4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{3-2}{3} = \frac{6-4}{6}$

Geometricamente, temos:

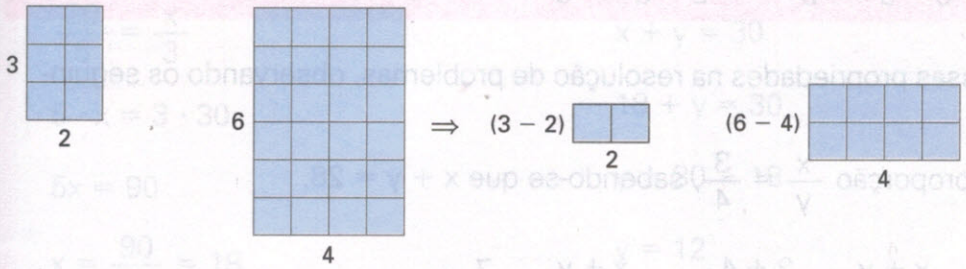


❖ $\frac{3}{2} \longrightarrow \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{6}{4} \longrightarrow \frac{6-4}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{3-2}{2} = \frac{6-4}{4}$

Geometricamente, temos:



Podemos enunciar a propriedade:

Em toda proporção, a soma ou a diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo), assim como a soma ou a diferença dos dois últimos termos está para o terceiro (ou para o quarto).

✓ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ ou $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

✓ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ ou $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

2ª propriedade

Seja a proporção $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Vamos obter, a partir dela, novas proporções:

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \longrightarrow \frac{6+3}{4+2} = \frac{9}{6} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{6+3}{4+2} = \frac{6}{4}$

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{6+3}{4+2} = \frac{3}{2}$

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \longrightarrow \frac{6-3}{4-2} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{6-3}{4-2} = \frac{6}{4}$

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{6-3}{4-2} = \frac{3}{2}$

Podemos enunciar a propriedade:

Em toda proporção, a soma (ou a diferença) dos antecedentes está para a soma (ou a diferença) dos conseqüentes, assim como cada antecedente está para o seu conseqüente.

✓ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ ou $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$

✓ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$ ou $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$

Vamos aplicar essas propriedades na resolução de problemas, observando os seguintes exemplos:

1. Determinar x e y na proporção $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, sabendo-se que $x + y = 28$.

$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \xrightarrow[\text{propriedade}]{\text{aplicando a}} \frac{x+y}{x} = \frac{3+4}{3} \Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{7}{3}$

Como $x + y = 28$

$\frac{28}{x} = \frac{7}{3}$

$7 \cdot x = 3 \cdot 28 \longrightarrow$ propriedade fundamental

$7x = 84$

$x = \frac{84}{7} = 12$

$x + y = 28$

$12 + y = 28$

$y = 28 - 12$

$y = 16$

Logo, $x = 12$ e $y = 16$.

2. A diferença entre dois números é 20. Sabendo-se que eles são proporcionais aos números 4 e 3, determinar esses números.

Vamos indicar por x e y os dois números.

Diferença entre os números $\Rightarrow x - y = 20$

x e y são proporcionais a 4 e 3 $\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

$\frac{x}{y} = \frac{4}{3} \xrightarrow[\text{propriedade}]{\text{aplicando a}} \frac{x-y}{x} = \frac{4-3}{4} \Rightarrow \frac{x-y}{x} = \frac{1}{4}$

Como $x - y = 20$

$\frac{20}{x} = \frac{1}{4}$

$1 \cdot x = 4 \cdot 20$

$x = 80$

$x - y = 20$

$80 - y = 20$

$-y = 20 - 80$

$-y = -60 \Rightarrow y = 60$

Os números são 80 e 60.

3. Resolver o sistema $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \\ x + y = 30 \end{cases}$

$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} \xrightarrow[\text{propriedade}]{\text{aplicando a}} \frac{x+y}{3+2} = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{x+y}{5} = \frac{x}{3}$

Como $x + y = 30$

$\frac{30}{5} = \frac{x}{3}$

$5 \cdot x = 3 \cdot 30$

$5x = 90$

$x = \frac{90}{5} = 18$

$S = \{(18, 12)\}$

$x + y = 30$

$18 + y = 30$

$y = 30 - 18$

$y = 12$

4. Para pintar uma parede, um pintor deve misturar tinta branca com tinta cinza na razão 5 para 3. Se ele precisar de 24 ℓ dessa mistura, quantos litros de cada cor irá utilizar?

Vamos indicar $\begin{cases} \text{quantidade de tinta branca: } x \\ \text{quantidade de tinta cinza: } y \end{cases}$

Quantidade total de tinta: $x + y = 24$

Razão 5 para 3: $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$

$\frac{x}{y} = \frac{5}{3} \xrightarrow[\text{propriedade}]{\text{aplicando a}} \frac{x+y}{x} = \frac{5+3}{5} \Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{8}{5}$

Como $x + y = 24$

$\frac{24}{x} = \frac{8}{5}$

$8 \cdot x = 5 \cdot 24$

$8x = 120$

$x = \frac{120}{8}$

$x = 15$ (tinta branca)

$x + y = 24$

$15 + y = 24$

$y = 24 - 15$

$y = 9$ (tinta cinza)

Ele irá utilizar 15 ℓ de tinta branca e 9 ℓ de tinta cinza.

5. Determinar os números *a*, *b* e *c*, sabendo que $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{2}$, e que $a + b + c = 200$.

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{2} \xrightarrow{\text{aplicando a propriedade}} \frac{a+b+c}{3+5+2} = \frac{a}{3} \Rightarrow \frac{a+b+c}{10} = \frac{a}{3}$$

Como $a + b + c = 200$

$$\frac{200}{10} = \frac{a}{3}$$

$$10 \cdot a = 3 \cdot 200$$

$$10a = 600$$

$$a = \frac{600}{10} = 60$$

Tomando as igualdades duas a duas:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} \Rightarrow \frac{60}{3} = \frac{b}{5}$$

$$3 \cdot b = 5 \cdot 60$$

$$3b = 300$$

$$b = \frac{300}{3} = 100$$

$$\frac{a}{3} = \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{60}{3} = \frac{c}{2}$$

$$3 \cdot c = 2 \cdot 60$$

$$3c = 120$$

$$c = \frac{120}{3} = 40$$

$a = 60$, $b = 100$ e $c = 40$

FIXAÇÃO

1 Determine x e y na proporção $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$, sabendo que $x + y = 32$.

2 Determine os números a e b na proporção $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$ quando:

a) $a + b = 33$ b) $a - b = -2$

3 Dois números estão entre si como 2 está para 1. Sabendo que a diferença entre eles é 40, calcule os dois números.

4 A soma de dois números é 96 e eles são proporcionais aos números 5 e 3. Quais são esses números?

5 Aplicando as propriedades, resolva as proporções:

a) $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, sabendo que $x + y = 90$.

b) $\frac{7}{3} = \frac{x}{y}$, sabendo que $x + y = 80$.

c) $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$, sabendo que $x - y = 12$.

6 A soma de dois números é 55. O maior deles está para 7 assim como o menor está para 4. Quais são esses dois números?

7 Aplicando as propriedades, resolva as proporções:

a) $\frac{x}{6} = \frac{y}{5}$, sendo $x - y = 15$.

b) $\frac{a}{5} = \frac{b}{4}$, sendo $a + b = 108$.

c) $\frac{2}{x} = \frac{5}{y}$, sendo $x + y = 140$.

d) $\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2}$, sabendo que $x + y + z = 90$.

e) $\frac{a}{7} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2}$, sabendo que $a + b + c = 96$.

8 A diferença entre as medidas de dois ângulos é 50°. Sabendo que essas medidas são proporcionais aos números 3 e 2, calcule as medidas desses ângulos.

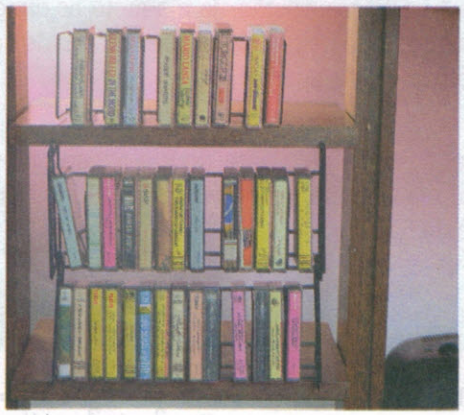
9 Para fazer uma limonada misturamos suco de limão com água na proporção de 2 para 5. Quantos litros de suco de limão e de água serão necessários para fazer 21 litros de limonada?

Fotos: Marinez Maravalhas Gomes

10 Aplicando as propriedades das proporções, resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{6}{5} \\ x - y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{7}{5} \\ x + y = 24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ x + y = 35 \end{cases}$

11 Tenho 36 fitas gravadas. A razão entre o número de fitas de música estrangeira e o número de fitas de música brasileira é de 1 para 3. Quantas fitas com música brasileira e quantas fitas com música estrangeira tenho?



12 A razão entre as massas de alumínio e de oxigênio na substância óxido de alumínio é igual a $\frac{7}{8}$. Calcule as massas de alumínio e de oxigênio necessárias para formar 51 g de óxido de alumínio.

RETOMANDO o que aprendeu

1 Uma escola tem 800 m^2 de área construída e 1 000 m^2 de área livre. Qual a razão da área construída para a área livre?

2 Um pai tem o dobro da idade de seu filho. Qual a razão:

a) da idade do pai para a idade do filho?

b) da idade do filho para a idade do pai?

3 Qual a razão entre as idades de dois irmãos gêmeos?

4 A razão do número de acertos para o número total de questões da prova de Flávia foi de $\frac{10}{18}$. A partir desses dados, podemos dizer que Flávia acertou mais ou menos da metade da prova?

5 Se um corredor faz 200 m em 25 segundos, qual a velocidade média desse corredor no percurso?

6 Um motorista tem de fazer um trajeto entre duas cidades, *A* e *B*. Nas primeiras 3 horas de viagem, ele segue com uma velocidade média de 80 km/h e, nas 2 horas restantes, com uma velocidade média de 95 km/h. Pergunta-se: qual a distância entre as duas cidades?

7 Ao montar uma maquete, Karina decidiu utilizar a escala 1 : 50. Quais serão, na maquete, as dimensões de um muro que na realidade possui 12 m de comprimento por 2 m de altura?

8 Qual a escala da planta de um terreno na qual o comprimento de 150 m foi representado por um segmento de 5 cm?

9 Qual o valor de x na proporção $\frac{1}{2x} = \frac{5}{x+1}$?

10 Observe as proporções $\frac{2x}{x-3} = \frac{4}{3}$ e $\frac{2}{y} = \frac{6}{15}$. Nessas condições, determine:

a) $y - x$ b) $x^2 + y^2$

11 Resolva a proporção $\frac{\frac{2}{5}}{x-2} = \frac{\frac{6}{5}}{x+4}$.

12 Sabendo que a soma de dois números consecutivos é 61, determine a razão entre esses números.

13 Sabendo que a soma de dois números é 100 e que o maior está para 3 assim como o menor está para 2, determine esses números.

14 A diferença entre dois números é 45. O maior deles está para 9 assim como o menor está para 4. Qual é o maior número?

15 A razão entre dois números é $\frac{1}{2}$. Se somarmos 4 ao menor número e subtrairmos 4 do maior número, a razão ficará igual a $\frac{4}{5}$. Quais são esses números?

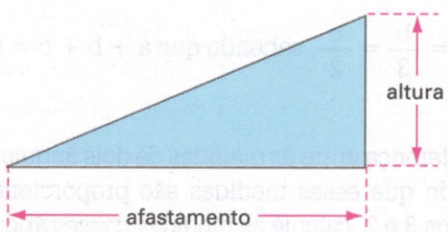
16 Divida o número 56 em duas partes inteiras de modo que a razão entre as partes seja $\frac{3}{5}$.

17 De carro, percorri 240 km em 4 horas. Quanto tempo eu teria gasto para percorrer 400 km se aumentasse a velocidade do carro em $\frac{1}{3}$?

18 O sal de cozinha é uma substância formada por cloro e sódio na razão $\frac{71}{46}$, em massa. Calcule, em gramas, a massa de cloro contido numa quantidade de sal com 23 g de sódio.

19 O perímetro de um triângulo é 54 cm. Quais as medidas dos três lados se elas são proporcionais a 2, 3 e 4?

20 A declividade de uma ladeira é expressa pela razão entre a sua altura e o seu afastamento. Se uma ladeira tem 10% de declividade e um afastamento de 50 m, qual é a altura da ladeira?



JORNAIS & REVISTAS

A tabela abaixo foi publicada no jornal *Folha de S. Paulo* de quarta-feira, 17 de setembro de 1997. Ela mostra os estoques dos seis reservatórios de água da Grande São Paulo de 13/09 a 16/09.

Aumentam estoques dos reservatórios de água

Reservatórios	Capacidade de abastecimento	Chuva acumulada até 13/09 (antes da chuva)	Chuva acumulada em 16/09 (depois da chuva)	Ganho com a chuva
Cantareira	56%	0 mm	29,6 mm	29,6 mm
Guarapiranga	20%	3,6 mm	51,8 mm	48,2 mm
Alto Tietê	9%	3,4 mm	38,3 mm	34,9 mm
Rio Grande	6%	10,4 mm	74,9 mm	64,5 mm
Rio Claro	6%	*	*	*
Cotia	3%	5,4 mm	77,7 mm	72,3 mm

*Indisponível até ontem

Fonte: Sabesp (Saneamento Básico do Estado de São Paulo)

1. Observando a tabela, indique:
a) o reservatório mais beneficiado com as chuvas do final de semana e de segunda-feira.
b) o ganho com a chuva no reservatório do Alto Tietê.

2. Supondo que a chuva acumulada até 13/09 no reservatório de Rio Claro seja de 6,7 mm, quanto deve chover ali, no mínimo, para que o ganho com a chuva supere o de Guarapiranga?

7 Grandezas proporcionais: regra de três

É comum, em nosso dia-a-dia, nos depararmos com situações que envolvem relações entre grandezas.

Quando um veículo, por exemplo, parte do Rio de Janeiro em direção a Salvador, ele leva um determinado tempo para completar o percurso, dependendo da velocidade que desenvolve.

Nessa situação, estamos envolvendo as grandezas *velocidade* e *tempo* por meio de uma proporção. É fácil perceber que, se o veículo aumentar a velocidade, o tempo para chegar a Salvador diminuirá; se diminuir a velocidade, levará um tempo maior para chegar ao seu destino.

Se uma máquina de xerox, por exemplo, permanecer em funcionamento durante um certo tempo, ela produzirá um determinado número de cópias.

Nessa situação, estamos envolvendo as grandezas *tempo* e *produção* por meio de uma proporção. É fácil perceber que, aumentando o tempo de funcionamento da máquina de xerox, a produção de cópias aumenta; diminuindo o tempo de funcionamento dela, a produção também diminui.

Nesta Unidade, estudaremos a relação entre duas grandezas quaisquer e a aplicação de proporções na resolução de problemas.

45 NÚMEROS DIRETA E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Números diretamente proporcionais

Consideremos a seguinte situação:

Uma torneira é aberta para encher um reservatório. De tempos em tempos, é medida a altura da água no reservatório, e o resultado dessa medição encontra-se na tabela seguinte:

Tempo (em min)	Altura da água (em cm)
10	12
15	18
20	24
25	30
30	36

Vamos observar o que ocorre quando consideramos um número da 1ª coluna e o seu correspondente na 2ª coluna:

$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$ $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$ $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$ $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

Podemos então escrever:

$$\frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

Quando isso acontece, dizemos que os números da 1ª coluna são *diretamente proporcionais* aos números correspondentes da 2ª coluna.

Dizemos que:

> Os números racionais x, y e z são diretamente proporcionais aos números racionais a, b e c quando se tem $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Vejamos a seguir alguns exemplos:

1. Verificar se os números 4, 10 e 30 são diretamente proporcionais aos números 8, 20 e 60.

$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$

Como $\frac{4}{8} = \frac{10}{20} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, podemos dizer que a sucessão de números 4, 10 e 30 é diretamente proporcional à sucessão de números 8, 20 e 60.

2. Verificar se os números 7, 10 e 13 são diretamente proporcionais aos números 21, 30 e 52.

$\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

Como $\frac{7}{21} = \frac{10}{30} \neq \frac{13}{52}$, podemos dizer que os números 7, 10 e 13 não são diretamente proporcionais aos números 21, 30 e 52.

3. Os números 6, x e y são diretamente proporcionais aos números 4, 8 e 20. Nessas condições, determinar os valores de x e y.

Para que 6, x e y sejam diretamente proporcionais a 4, 8 e 20, devemos ter:

$$\frac{6}{4} = \frac{x}{8} = \frac{y}{20}$$

Daí, temos:

$$\frac{6}{4} = \frac{x}{8} \Rightarrow 4x = 48 \Rightarrow x = \frac{48}{4} \Rightarrow x = 12$$

$$\frac{6}{4} = \frac{y}{20} \Rightarrow 4y = 120 \Rightarrow y = \frac{120}{4} \Rightarrow y = 30$$

Temos que $x = 12$ e $y = 30$.

4. Um barbante de comprimento 200 cm é dividido em partes diretamente proporcionais aos números 3, 5 e 2. Qual o comprimento de cada pedaço?

Vamos representar os comprimentos dos pedaços por a, b e c, tais que $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{2} = x$.

Daí concluímos que:

$$\frac{a}{3} = x \Rightarrow a = 3x \qquad \frac{b}{5} = x \Rightarrow b = 5x \qquad \frac{c}{2} = x \Rightarrow c = 2x$$

Como a soma das três partes deve dar 200, temos:

$$a + b + c = 200$$

$$3x + 5x + 2x = 200$$

$$10x = 200 \Rightarrow x = \frac{200}{10} \Rightarrow x = 20$$

As partes procuradas são:

$$a = 3x = 3 \cdot (20) = 60$$
$$b = 5x = 5 \cdot (20) = 100$$
$$c = 2x = 2 \cdot (20) = 40$$
$$60 + 100 + 40 = 200$$

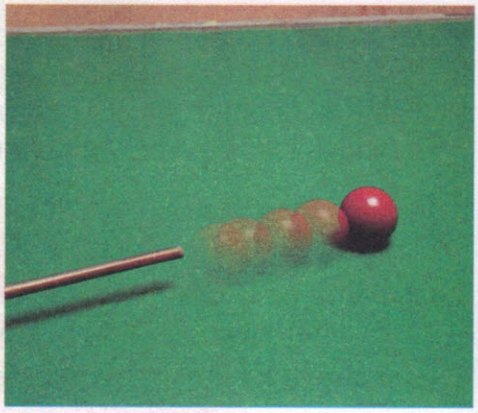
Os comprimentos dos pedaços são 60, 100 e 40.

Números inversamente proporcionais

Consideremos a seguinte situação:

Uma bolinha deve se deslocar de um ponto *A* até um ponto *B*. A velocidade da bolinha e o tempo correspondente que ela gasta nesse deslocamento estão na tabela seguinte:

Velocidade (em m/s)	Tempo (em s)
20	60
40	30
60	20
80	15



Sérgio Dotta Jr/The Next

Vamos observar o que ocorre quando consideramos um número da 1ª coluna e o seu correspondente na 2ª coluna:

$20 \cdot 60 = 1\,200$ $\quad$ $40 \cdot 30 = 1\,200$ $\quad$ $60 \cdot 20 = 1\,200$ $\quad$ $80 \cdot 15 = 1\,200$

Podemos, então, escrever:

$$20 \cdot 60 = 40 \cdot 30 = 60 \cdot 20 = 80 \cdot 15 = 1\,200$$

Quando isso acontece, dizemos que os números da 1ª coluna são *inversamente proporcionais* aos números correspondentes da 2ª coluna.

Dizemos, então, que:

> Os números racionais *x*, *y* e *z* são *inversamente proporcionais* aos números racionais *a*, *b* e *c* quando se tem $x \cdot a = y \cdot b = z \cdot c$.

Vejamos alguns exemplos nos quais aplicamos essa definição:

1. Verificar se os números 120, 30 e 16 são inversamente proporcionais aos números 2, 8 e 15.

$120 \cdot 2 = 240$ $\quad$ $30 \cdot 8 = 240$ $\quad$ $16 \cdot 15 = 240$

Como $120 \cdot 2 = 30 \cdot 8 = 16 \cdot 15 = 240$, os números 120, 30 e 16 são inversamente proporcionais aos números 2, 8 e 15.

2. Os números *x*, *y*, 2 e *z* são inversamente proporcionais aos números 6, 10, 15 e 60. Quais são os números *x*, *y* e *z*?

$x \cdot 6 = y \cdot 10 = 2 \cdot 15 = z \cdot 60$

$6x = 10y = 30 = 60z$

Daí obtemos:

$6x = 30$ $\qquad$ $10y = 30$ $\qquad$ $60z = 30$

$x = \frac{30}{6}$ $\qquad$ $y = \frac{30}{10}$ $\qquad$ $z = \frac{30}{60}$

$x = 5$ $\qquad$ $y = 3$ $\qquad$ $z = \frac{1}{2}$

Temos $x = 5$, $y = 3$ e $z = \frac{1}{2}$.

3. Vamos repartir o número 620 em três parcelas que são inversamente proporcionais aos números 5, 2 e 3. Quais são os valores dessas parcelas?

Vamos representar as parcelas por *a*, *b* e *c*, tais que $a \cdot 5 = b \cdot 2 = c \cdot 3 = x$

Daí podemos tirar:

$5a = x$ $\qquad$ $2b = x$ $\qquad$ $3c = x$

$a = \frac{x}{5}$ $\qquad$ $b = \frac{x}{2}$ $\qquad$ $c = \frac{x}{3}$

Como a soma das três parcelas deve dar 620, temos:

$a + b + c = 620$

ou

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 620$$

$$\frac{6x}{30} + \frac{15x}{30} + \frac{10x}{30} = \frac{18\,600}{30}$$

$$6x + 15x + 10x = 18\,600$$

$$31x = 18\,600$$

$$x = \frac{18\,600}{31} = 600$$

As parcelas procuradas são:

$$a = \frac{x}{5} = \frac{600}{5} = 120$$

$$b = \frac{x}{2} = \frac{600}{2} = 300$$

$$c = \frac{x}{3} = \frac{600}{3} = 200$$

As parcelas procuradas são 120, 300 e 200.

FIXAÇÃO

1 Verificar se:

a) os números 4, 9 e 7 são diretamente proporcionais aos números 16, 36 e 28.

b) os números 7, 2 e 35 são inversamente proporcionais aos números 50, 175 e 10.

c) os números 6, 12 e 18 são inversamente proporcionais aos números 14, 7 e 4.

d) os números 1,5; 2 e 2,4 são inversamente proporcionais aos números 4; 3 e 2,5.

2 Os números x, y e 32 são diretamente proporcionais aos números 40, 72 e 128. Determine os números x e y.

3 Quais devem ser os valores dos números x e y para que os números 3, 12 e y sejam inversamente proporcionais aos números x, 30 e 10?

4 Os números x, $\frac{5}{2}$ e $\frac{3}{4}$ são inversamente proporcionais aos números 3, $\frac{3}{5}$ e y. Calcule os números x e y.

5 Vamos repartir 420 em três parcelas que são diretamente proporcionais aos números 3, 7 e 4. Quais são as três parcelas?

6 Vamos repartir o número 380 em parcelas que são inversamente proporcionais aos números 2, 5 e 4. Quais são essas parcelas?

7 As massas de cobre e zinco que se fundem para formar o latão são diretamente proporcionais aos números 7 e 3. Quantos quilogramas de cobre e quantos quilogramas de zinco são necessários para obter 40 kg de latão?

8 Ao iniciar uma viagem, separei meu dinheiro em partes diretamente proporcionais aos números 5, 3 e 2. A primeira parte destinei para transportes, a segunda para compras e a terceira para hospedagem. Tendo levado 3 000 reais para essa viagem, quanto reservei para cada item?

9 Patrícia comprou 90 sorvetes para a festa de aniversário de sua filha, de sabores chocolate, morango e flocos, em quantidades diretamente proporcionais a 8, 2 e 5. Quantos sorvetes de cada sabor ela comprou?

10 Um treinamento de voleibol teve 240 minutos de duração e foi dividido em três partes: a primeira foi dedicada à preparação física; a segunda, ao treinamento de jogadas ensaiadas e bloqueios, e a terceira, a um "racha" entre os jogadores. Sabendo-se que os tempos de duração de cada parte são diretamente proporcionais aos números 3, 4 e 1, quanto tempo durou cada parte do treinamento?

11 Um prêmio de 460 reais foi repartido entre três funcionários de uma firma em partes inversamente proporcionais aos seus salários. O funcionário A recebe 5 salários mínimos, o funcionário B, 8 salários mínimos e o funcionário C, 4 salários mínimos. Qual a parte do prêmio que coube a cada funcionário?

12 Dois amigos jogaram na loto de tal forma que o primeiro entrou com 14 reais e o segundo com 22 reais. Ganharam um prêmio de 16 200 reais e resolveram dividir esse prêmio em partes diretamente proporcionais às quantias com que cada um entrou. Quanto recebeu cada um?

Grandezas proporcionais

Constantemente, você observa situações como:

- ✓ O *tempo* que se gasta numa viagem depende da *velocidade* do veículo.
- ✓ A *nota* que um aluno tira numa prova depende do *número de questões* que ele acerta.
- ✓ A *quantidade* de tinta que se gasta para fazer uma pintura depende da *área* a ser pintada.

Em todas essas situações, você observa que existem *grandezas que variam*, uma dependendo da outra. Essas grandezas, que se relacionam entre si, são chamadas grandezas variáveis dependentes.

Grandezas diretamente proporcionais

Consideremos a seguinte situação:

Numa mola presa a um teto por uma de suas extremidades, são pendurados corpos de massas diferentes. A seguir, medindo o comprimento da mola, que se modifica com a massa do corpo nela colocado, pode-se organizar a seguinte tabela.

Massa do corpo (em kg)	Comprimento da mola (em cm)
10	50
20	100
30	150

Pela tabela, você pode notar que:

- ✓ Se a massa do corpo *duplica*, o comprimento da mola também *duplica*.
- ✓ Se a massa do corpo *triplica*, o comprimento da mola também *triplica*.

Nessas condições, as duas grandezas envolvidas (a massa do corpo e o comprimento da mola) são chamadas grandezas diretamente proporcionais.

> Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, dobrando uma delas, a outra também dobra; triplicando uma delas, a outra também triplica... e assim por diante.

Vejamos o que ocorre com os números que expressam duas grandezas diretamente proporcionais:

1. Quando a massa do corpo passa de 10 kg para 20 kg, dizemos que a massa varia na razão $\frac{10}{20}$; enquanto isso, o comprimento da mola passa de 50 cm para 100 cm, ou seja, o comprimento varia na razão $\frac{50}{100}$.

   Você vai notar que as duas razões são iguais, ou seja:

$$\frac{10}{20} = \frac{50}{100}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$$

2. Quando a massa do corpo passa de 10 kg para 30 kg, dizemos que a massa varia na razão $\frac{10}{30}$; enquanto isso, o comprimento da mola passa de 50 cm para 150 cm, ou seja, o comprimento varia na razão $\frac{50}{150}$.

Você vai notar que as duas razões são iguais, ou seja:

$$\frac{10}{30} = \frac{50}{150}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3}$$

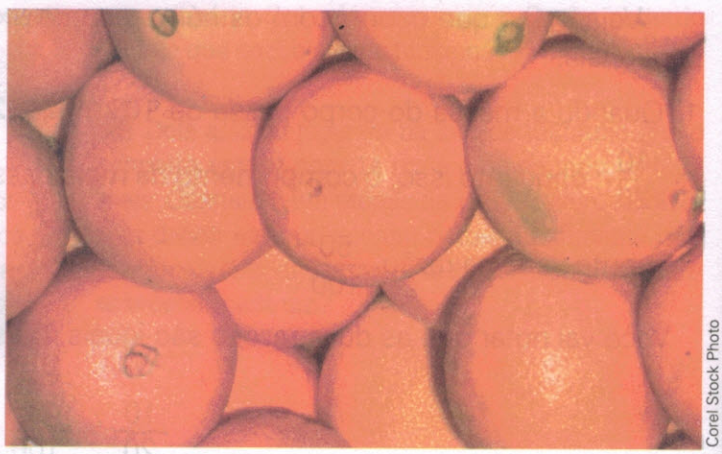
Quando duas grandezas variam sempre na mesma razão, dizemos que essas grandezas são *diretamente proporcionais*.

Veja outros exemplos de grandezas diretamente proporcionais:

3. Quando vamos pintar uma parede, a quantidade de tinta que usamos é diretamente proporcional à área a ser pintada: duplicando-se a área, gasta-se o dobro de tinta; triplicando-se a área, gasta-se o triplo de tinta.

Juca Martins/Pulsar

4. Quando compramos laranjas na feira, o preço que pagamos é diretamente proporcional à quantidade de laranjas que compramos: duplicando-se a quantidade de laranjas, o preço também duplica; triplicando-se a quantidade de laranjas, o preço também triplica.



Corel Stock Photo

Grandezas inversamente proporcionais

Consideremos a seguinte situação:

A professora de Português da 6ª série tem 48 livros para distribuir igualmente entre seus alunos.

Se ela escolher apenas dois alunos, cada um deles receberá 24 livros.

Se ela escolher quatro alunos, cada um receberá 12 livros.

Se ela escolher seis alunos, cada um receberá 8 livros.

Vamos colocar esses dados no quadro seguinte:

Número de alunos escolhidos	Número de livros distribuídos a cada aluno
2	24
4	12
6	8

Pela tabela você pode notar que:

Se o número de alunos *duplica*, o número de livros cai para a *metade*.

Se o número de alunos *triplica*, o número de livros cai para a *terça parte*.

Nessas condições, as duas grandezas envolvidas (quantidade de alunos escolhidos e a quantidade de livros que serão distribuídos a cada aluno) são chamadas grandezas inversamente proporcionais.

Daí, temos:

> Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, dobrando uma delas, a outra se reduz para a metade; triplicando uma delas, a outra se reduz para a terça parte... e assim por diante.

Vejamos o que ocorre com os números que expressam duas grandezas inversamente proporcionais.

1. Quando o número de alunos passa de 2 para 4, dizemos que o número de alunos varia na razão $\frac{2}{4}$; enquanto isso, o número de livros passa de 24 para 12, variando na razão $\frac{24}{12}$.

   Você vai notar que essas razões não são iguais; são inversas. Veja:

   $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \\ \frac{24}{12} = \frac{2}{1}\end{array}\right\}$ $\frac{2}{4}$ e $\frac{24}{12}$ são *razões inversas*

2. Quando o número de alunos passa de 2 para 6, dizemos que o número de alunos varia na razão $\frac{2}{6}$; enquanto isso, o número de livros passa de 24 para 8, variando na razão $\frac{24}{8}$.

   E novamente você vai notar que as razões são inversas:

   $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \\ \frac{24}{8} = \frac{3}{1}\end{array}\right\}$ $\frac{2}{6}$ e $\frac{24}{8}$ são *razões inversas*

> Quando duas grandezas são *inversamente proporcionais*, os números que expressam essas grandezas variam um na razão inversa do outro.

Veja outros exemplos de grandezas inversamente proporcionais:

3. Quando vamos fazer uma construção, o tempo que se gasta nessa construção é *inversamente proporcional* ao número de operários que se contrata: duplicando o número de operários, o tempo cai para a metade.

4. Quando fazemos uma viagem, o tempo que se leva para fazer essa viagem é *inversamente proporcional* à velocidade do veículo usado: dobrando-se a velocidade do veículo, o tempo gasto na viagem cai para a metade.

Fotos: Corel Stock Photo

FIXAÇÃO

1 A tabela abaixo relaciona a produção (em unidades) de uma máquina com o tempo de funcionamento dessa máquina. Observando a tabela, responda:

Tempo	Produção
4 horas	600
10 horas	1 500

a) Quando o tempo passa de 4 h para 10 h, ele varia em que razão?

b) Quando a produção passa de 600 unidades para 1 500 unidades, ela varia em que razão?

c) As razões são iguais ou inversas?

d) A produção e o tempo de funcionamento de uma máquina são grandezas diretamente ou inversamente proporcionais?

2 O quadro abaixo relaciona o número de ganhadores de um prêmio da loteria e a quantia que cada ganhador recebe. Nessas condições, responda:

Número de ganhadores	Quantia que cada um recebe
2	15 milhões
6	5 milhões

a) Quando o número de ganhadores passa de 2 para 6, ele varia em que razão?

b) Quando a quantia recebida por cada ganhador varia de 15 milhões para 5 milhões, ela varia em que razão?

c) As razões são iguais ou inversas?

d) O número de ganhadores do prêmio e a quantia que cada um recebe são grandezas diretamente ou inversamente proporcionais?

3 O quadro abaixo relaciona a área de um terreno e a quantidade de grama usada para gramar esse terreno. Nessas condições, responda:

Área do terreno	Quantidade de grama
150 m^2	300 kg
200 m^2	400 kg

a) Quando a área passa de 150 m^2 para 200 m^2, ela varia em que razão?

b) Quando a quantidade de grama passa de 300 kg para 400 kg, ela varia em que razão?

c) As razões são iguais ou inversas?

d) A quantidade de grama e a área do terreno são grandezas diretamente ou inversamente proporcionais?

4 A área de um retângulo é obtida multiplicando-se a medida do comprimento pela medida da largura. Um retângulo tem 40 cm de comprimento. Nessas condições, responda:

a) Qual a área do retângulo se a largura for 8 cm?

b) Qual a área do retângulo se a largura for 6 cm?

c) Quando a largura passa de 8 cm para 6 cm, ela varia em que razão?

d) As áreas obtidas nos itens *a* e *b* variam em que razão?

e) As razões são iguais ou inversas?

f) Se os retângulos têm o mesmo comprimento, a medida da largura e a área do retângulo são grandezas diretamente ou inversamente proporcionais?

5 Um ônibus faz o percurso da praça Central até a praça de um bairro. Um fiscal anotou a velocidade do ônibus e o tempo que ele gastou no percurso de ida e volta. O quadro seguinte mostra esses dados:

Velocidade	Tempo
60 km/h	80 min
50 km/h	96 min

Nessas condições, responda:

a) Quando a velocidade passou de 60 km/h para 50 km/h, ela variou em que razão?

b) Quando o tempo gasto no percurso passou de 80 min para 96 min, ele variou em que razão?

c) As razões são iguais ou inversas?

d) A velocidade do ônibus e o tempo que ele gastou para fazer o percurso são grandezas diretamente ou inversamente proporcionais?

6 Responda se as grandezas envolvidas nas seguintes afirmações são diretamente ou inversamente proporcionais:

a) A medida do lado e o perímetro de um quadrado.

b) A medida do lado e o perímetro de um triângulo eqüilátero.

c) O número de pintores e o tempo que eles gastam para pintar um prédio.

d) A quantidade de balas que se compra e o preço que se paga pelas balas.

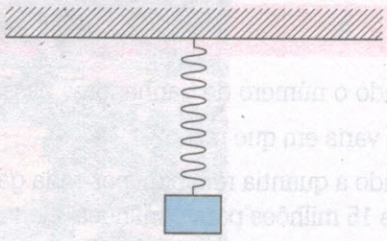
e) O número de tijolos e a área de um muro que se quer levantar.

f) A distância percorrida e o tempo gasto para percorrer essa distância, com a mesma velocidade.

46 REGRA DE TRÊS SIMPLES

Consideremos as seguintes situações:

1ª Na extremidade de uma mola é colocado um corpo com massa de 10 kg e verifica-se que o comprimento da mola é de 42 cm. Se colocarmos uma massa de 15 kg na extremidade dessa mola, qual será o comprimento da mola?



Vamos representar pela letra x o comprimento pedido.

Estamos relacionando dois valores da grandeza *massa* (10 kg e 15 kg) com dois valores da grandeza *comprimento* (42 cm e x cm).

Queremos determinar um desses quatro valores, conhecidos os outros três. Para isso, vamos organizar os dados numa tabela.

Massa	Comprimento
10 kg	42 cm
15 kg	x

Se duplicarmos a massa inicial do corpo, o comprimento da mola também duplicará. Logo, as grandezas são *diretamente proporcionais*. Assim, os números 10 e 15 são *diretamente proporcionais* aos números 42 e x.

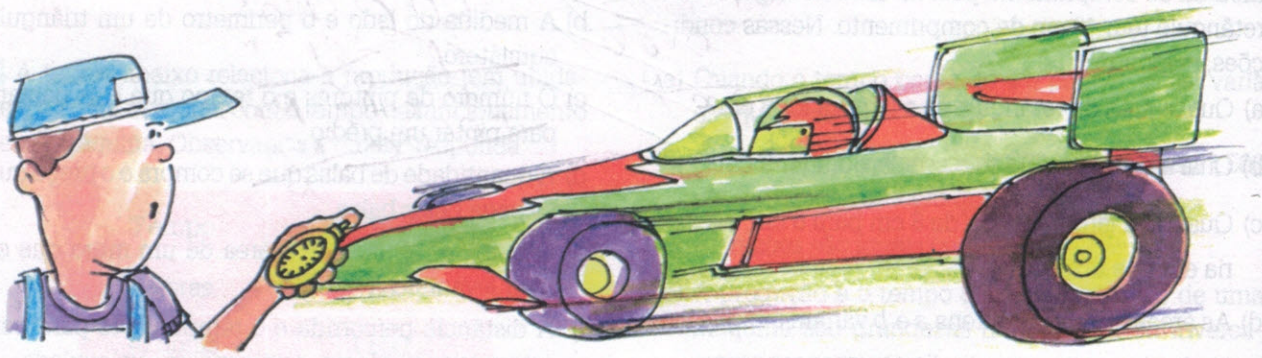
Daí temos:

$$\frac{10}{15} = \frac{42}{x} \longrightarrow 10x = 42 \cdot 15 \longrightarrow 10x = 630$$

$$x = \frac{630}{10} \qquad x = 63$$

O comprimento da mola será de 63 cm.

2ª Ao participar de um treino de Fórmula 1, um competidor, imprimindo velocidade média de 200 km/h, faz o percurso em 18 segundos. Se sua velocidade fosse de 240 km/h, qual o tempo que ele teria gasto no percurso?



Vamos representar pela letra x o tempo procurado.

Estamos relacionando dois valores da grandeza *velocidade* (200 km/h e 240 km/h) com dois valores da grandeza *tempo* (18 s e x s).

Queremos determinar um desses valores, conhecidos os outros três.

Velocidade	Tempo gasto para fazer o percurso
200 km/h	18 s
240 km/h	x

Se duplicarmos a velocidade inicial do carro, o tempo gasto para fazer o percurso cairá para a metade; logo, as grandezas são *inversamente proporcionais*. Assim, os números 200 e 240 são *inversamente proporcionais* aos números 18 e x.

Daí temos:

$200 \cdot 18 = 240 \cdot x \qquad x = \dfrac{3\,600}{240}$

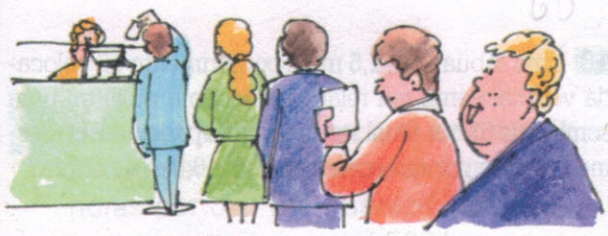
$3\,600 = 240x \qquad x = 15$

$240x = 3\,600$

O corredor teria gasto 15 segundos no percurso.

FIXAÇÃO

1 Em um banco, constatou-se que um caixa leva, em média, 5 minutos para atender 3 clientes. Qual é o tempo que esse caixa vai levar para atender 36 clientes?



2 Uma tábua de 2 m, quando colocada verticalmente, produz uma sombra de 80 cm. Qual é a altura de um edifício que, no mesmo instante, projeta uma sombra de 12 m? (Sugestão: transforme 80 cm em *m*.)

3 Para paginar um livro que tem 45 linhas em cada página são necessárias 280 páginas. Quantas páginas com 30 linhas cada uma seriam necessárias para paginar o mesmo livro?

4 Uma rua tem 600 m de comprimento e está sendo asfaltada. Em seis dias foram asfaltados 180 m da rua. Supondo-se que o ritmo de trabalho continue o mesmo, em quantos dias o trabalho estará terminado?

5 Com o auxílio de uma corda, que julgava ter 2 m de comprimento, medi o comprimento de um fio elétrico e encontrei 40 m. Descobri, mais tarde, que a corda media, na realidade, 2,05 m. Qual é o comprimento verdadeiro do fio?

6 Quero ampliar uma foto 3 × 4 (3 cm de largura e 4 cm de comprimento) de forma que a nova foto tenha 10,5 cm de largura. Qual será o comprimento da foto ampliada?

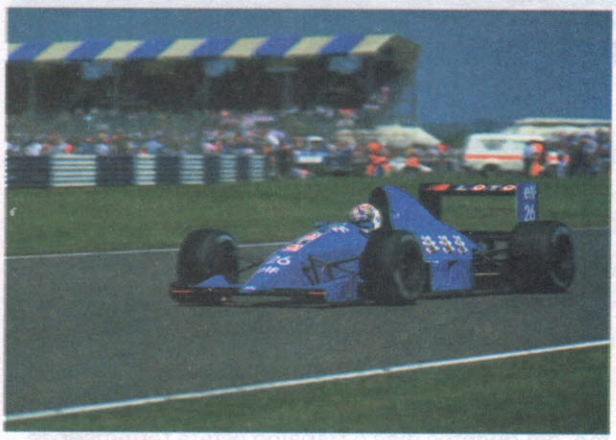
7 Com a velocidade de 75 km/h, um ônibus faz um percurso em 40 minutos. Devido a um pequeno congestionamento, esse ônibus fez o percurso de volta em 50 minutos. Qual a velocidade média desse ônibus no percurso de volta?

8 Num mapa, a distância Rio-Salvador, que é de 1 600 km, está representada por 24 cm. A quantos centímetros corresponde, nesse mapa, a distância Brasília-Salvador, que é de 1 200 km?

9 Duas piscinas têm a mesma largura e a mesma profundidade e comprimentos diferentes. Na piscina que tem 8 m de comprimento, a quantidade de água que cabe na piscina é de 45 000 litros. Quantos litros de água cabem na piscina que tem 10 m de comprimento?

10 Para transportar material bruto para uma construção, foram usados 16 caminhões com capacidade de 5 m^3 cada um. Se a capacidade de cada caminhão fosse de 4 m^3, quantos caminhões seriam necessários para fazer o mesmo serviço?

11 Um piloto manteve, em um treino, a velocidade média de 153 km/h. Sabendo-se que 1 h = 3 600 s, qual foi a velocidade desse piloto em m/s?



Corel Stock Photo

12 Para construir a cobertura de uma quadra de basquete, 25 operários levaram 48 dias. Se fosse construída um cobertura idêntica em outra quadra e fossem contratados 30 operários de mesma capacidade que os primeiros, em quantos dias a cobertura estaria pronta?

13 Para forrar as paredes de uma sala, foram usadas 21 peças de papel de parede com 80 cm de largura. Se houvesse peças desse mesmo papel que tivessem 1,20 m de largura, quantas dessas peças seriam usadas para forrar a mesma parede?

Marinez Maravalhas Gomes

14 A velocidade de um móvel é de 30 m/s. Qual será sua velocidade em km/h?

15 Para pintar um barco, 12 pessoas levaram 8 dias. Quantas pessoas, de mesma capacidade de trabalho que as primeiras, são necessárias para pintar o mesmo barco em 6 dias?

16 Um muro deverá ter 49 m de comprimento. Em quatro dias, foram construídos 14 m do muro. Supondo-se que o trabalho continue a ser feito no mesmo ritmo, em quantos dias será construído o restante do muro?

17 Para azulejar uma parede retangular, que tem 6,5 m de comprimento por 3 m de altura, foram usados 390 azulejos. Quantos azulejos iguais a esses seriam usados para azulejar uma parede que tem 15 m^2 de área?

18 Uma tábua com 1,5 m de comprimento foi colocada verticalmente em relação ao chão e projetou uma sombra de 53 cm. Qual seria a sombra projetada no mesmo instante por um poste que tem 10,5 m de altura?

19 Com uma certa quantidade de arame pode-se fazer uma tela de 50 m de comprimento por 1,20 m de largura. Aumentando-se a largura em 1,80 m, qual será o comprimento de uma outra tela feita com a mesma quantidade de arame da tela anterior?

47 REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Consideremos algumas situações:

1ª Trabalhando durante 6 dias, 5 operários produzem 400 peças. Quantas peças desse mesmo tipo serão produzidas por 7 operários, trabalhando durante 9 dias?

Vamos organizar os dados no quadro seguinte, indicando com a letra x o número de peças pedido:

Número de operários	Número de dias	Número de peças
5	6	400
7	9	x
A	B	C

✓ Fixando a grandeza *A*, vamos relacionar as grandezas *B* e *C*.
Se dobrarmos o número de dias, o número de peças também dobrará. Logo, as grandezas *B* e *C* são *diretamente proporcionais*.

✓ Fixando a grandeza *B*, vamos relacionar as grandezas *A* e *C*.
Se dobrarmos o número de operários, o número de peças também dobrará. Logo, as grandezas *A* e *C* são *diretamente proporcionais*.

Então, a grandeza *C* é diretamente proporcional às grandezas *A* e *B*. Logo, seus valores serão diretamente proporcionais aos produtos dos valores das grandezas *A* e *B*, ou seja:

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{9} = \frac{400}{x} \qquad x = \frac{25\,200}{30}$$

$$\frac{30}{63} = \frac{400}{x} \qquad x = 840$$

$$30x = 25\,200$$

Se as máquinas funcionarem durante 9 dias, serão produzidas 840 peças.

2ª Um motociclista percorre em média 200 km em 2 dias, se rodar durante 4 horas por dia. Em quantos dias esse motociclista percorrerá 500 km, se rodar 5 horas por dia?

Corel Stock Photo

Indicando o número de dias pela letra x, vamos colocar os dados do problema no seguinte quadro:

Número de km	Número de h/dia	Número de dias
200	4	2
500	5	x
A	B	C

✓ Fixando a grandeza *A*, vamos relacionar as grandezas *B* e *C*.
Dobrando-se o número de horas que ele roda por dia, o número de dias cairá para a metade. Logo, as grandezas *B* e *C* são *inversamente proporcionais*.

✓ Fixando a grandeza *B*, vamos relacionar as grandezas *A* e *C*.
Dobrando-se o número de quilômetros percorridos, o número de dias também dobrará. Logo, as grandezas *A* e *C* são *diretamente proporcionais*.

Então, a grandeza *C* é diretamente proporcional à grandeza *A* e inversamente proporcional à grandeza *B*. Isso nos leva a escrever a razão inversa dos valores que representam a grandeza *B*.

Daí temos:

$$\frac{200}{500} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2}{x}$$

razão inversa

$$\frac{1\,000}{2\,000} = \frac{2}{x}$$

$$1\,000x = 4\,000$$

$$x = \frac{4\,000}{1\,000}$$

$$x = 4$$

O motociclista levará 4 dias para percorrer 500 km, se rodar 5 horas por dia.

FIXAÇÃO

1 Em 30 dias, uma frota de 25 táxis consome 100 000 ℓ de combustível. Em quantos dias uma frota de 36 táxis consumiria 240 000 ℓ de combustível?

2 Um folheto enviado pela Sabesp informa que uma torneira, pingando 20 gotas por minuto, em 30 dias, ocasiona um desperdício de 100 ℓ de água. Na casa de Helena, uma torneira esteve pingando 30 gotas por minuto durante 50 dias. Calcule quantos litros de água foram desperdiçados.

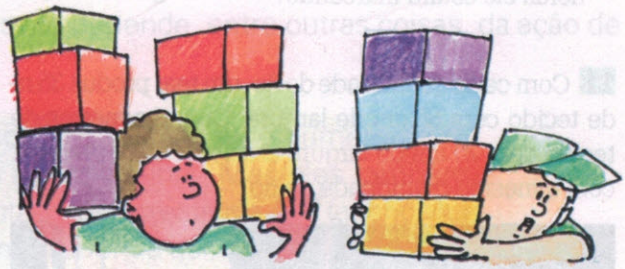
3 Numa fábrica de calçados, trabalham 16 operários que produzem, em 8 horas de serviço diário, 240 pares de calçados. Quantos operários são necessários para produzir 600 pares de calçados por dia, com 10 horas de trabalho diário?

4 Meia dúzia de digitadores preparam 720 páginas em 18 dias. Em quantos dias 8 digitadores, com a mesma capacidade dos primeiros, prepararão 800 páginas?

5 Para erguer um muro com 2,5 m de altura e 30 m de comprimento, certo número de operários levou 24 dias. Em quantos dias esse mesmo número de operários ergueria um muro de 2 m de altura e 25 m de comprimento?

6 Um automóvel, com velocidade média de 60 km/h, roda 8 h por dia e leva 6 dias para fazer certo percurso. Se a sua velocidade fosse de 80 km/h e se rodasse 9 horas por dia, em quanto tempo ele faria o mesmo percurso?

7 Dois carregadores levam caixas do depósito para um caminhão. Um deles leva 4 caixas por vez e demora 3 minutos para ir e voltar. O outro leva 6 caixas por vez e demora 5 minutos para ir e voltar. Enquanto o mais rápido leva 240 caixas, quantas caixas leva o outro?



RETOMANDO o que aprendeu

1 Verifique se os números 5, 1 e 30 são inversamente proporcionais aos números 3, 15 e $\frac{1}{2}$.

2 Sabendo que os números a, 12 e 15 são diretamente proporcionais aos números 28, b e 20, determine os números a e b.

3 Quando você dividiu um certo número em parcelas inversamente proporcionais aos números 2, 5 e 4, a primeira parcela que você obteve foi 200. Quais são as outras parcelas e qual é o número que foi dividido?

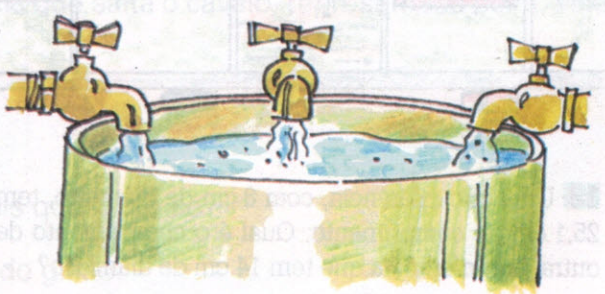
4 Três pessoas realizaram um certo trabalho e devem receber 600 reais pelo trabalho. Ficou combinado que essa quantia deve ser repartida em partes diretamente proporcionais ao número de horas que cada um trabalhou. Sabendo-se que a pessoa A trabalhou 2 horas, a pessoa B trabalhou 5 horas e a pessoa C trabalhou 3 horas, quanto deverá receber cada pessoa?

5 Quais devem ser os valores de x e y para que 3, x e 10 sejam inversamente proporcionais a 5, 25 e y?

6 Um comerciante precisa pagar uma dívida de 30 mil reais, outra de 40 mil reais e uma terceira de 50 mil reais. Como só tem 90 mil reais, resolve pagar quantias diretamente proporcionais a cada débito. Quanto receberá o maior credor?

7 Repartir o número 222 em três parcelas diretamente proporcionais a $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{8}$.

8 Um reservatório de 2 520 ℓ de capacidade foi completamente enchido por 3 torneiras que despejaram 12 ℓ, 8 ℓ e 16 ℓ de água por minuto nesse reservatório. Dê a quantidade de água que o reservatório recebeu de cada torneira.



9 Uma foto mede 2,5 cm por 3,5 cm e se quer ampliá-la de tal maneira que o lado maior meça 14 cm. Quanto deve medir o lado menor da foto ampliada?

10 O ponteiro menor de um relógio percorre um ângulo de 30 graus em 60 minutos. Nessas condições, responda:

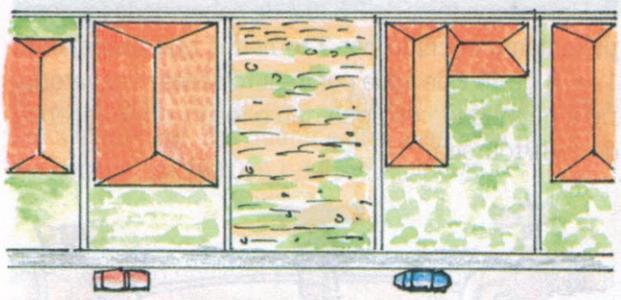
a) Quanto tempo ele levará para percorrer um ângulo de 42 graus?

b) Se o relógio foi acertado às 12 horas (meio-dia), que horas ele estará marcando?

11 Com certa quantidade de fio, um tear produz 35 m de tecido com 50 cm de largura. Quantos metros de tecido com 70 cm de largura esse tear pode produzir com a mesma quantidade de fio?

Corel Stock Photo

12 A área de um terreno é dada pelo produto do comprimento pela largura. Um terreno retangular tem 50 m de comprimento por 32 m de largura. Se você diminuir 7 m da largura, de quantos metros deverá aumentar o comprimento para que a área do terreno seja mantida?



13 Uma circunferência, com 8 cm de diâmetro, tem 25,1 cm de comprimento. Qual é o comprimento de outra circunferência que tem 14 cm de diâmetro?

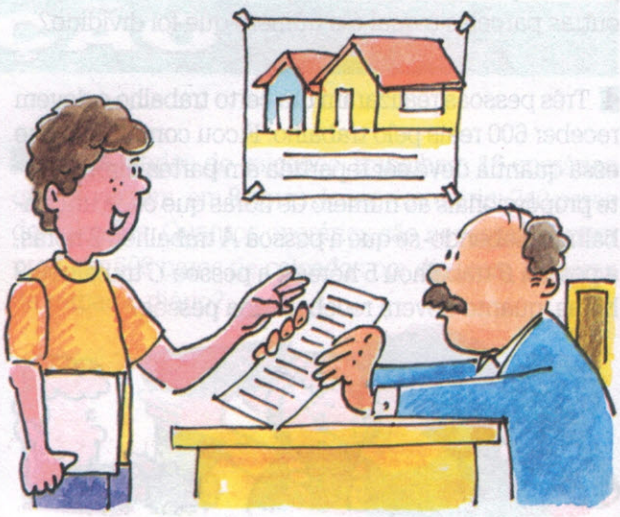
14 Uma certa quantidade de azeite foi colocada em latas de 2 litros cada uma, obtendo-se assim 60 latas. Se fossem usadas latas de 3 litros, quantas latas seriam necessárias para colocar a mesma quantidade de azeite?

15 Um certo número foi repartido em três parcelas inversamente proporcionais aos números 2, 5 e 3. A parcela correspondente ao último número é 270. Qual é o número que foi repartido?

16 Se $\frac{3}{7}$ da capacidade de um reservatório corresponde a 8 400 ℓ, a quantos litros corresponde $\frac{2}{5}$ da capacidade do mesmo tanque?

17 Com velocidade média de 60 km/h, fui de carro de uma cidade *A* para uma cidade *B* em 16 min. Se a volta foi feita em 12 minutos, qual a velocidade média da volta?

18 Num recenseamento, chegou-se à seguinte conclusão: para visitar 102 residências, é necessário contratar 9 recenseadores. Numa região em que existem 3 060 residências, quantos recenseadores precisam ser contratados?

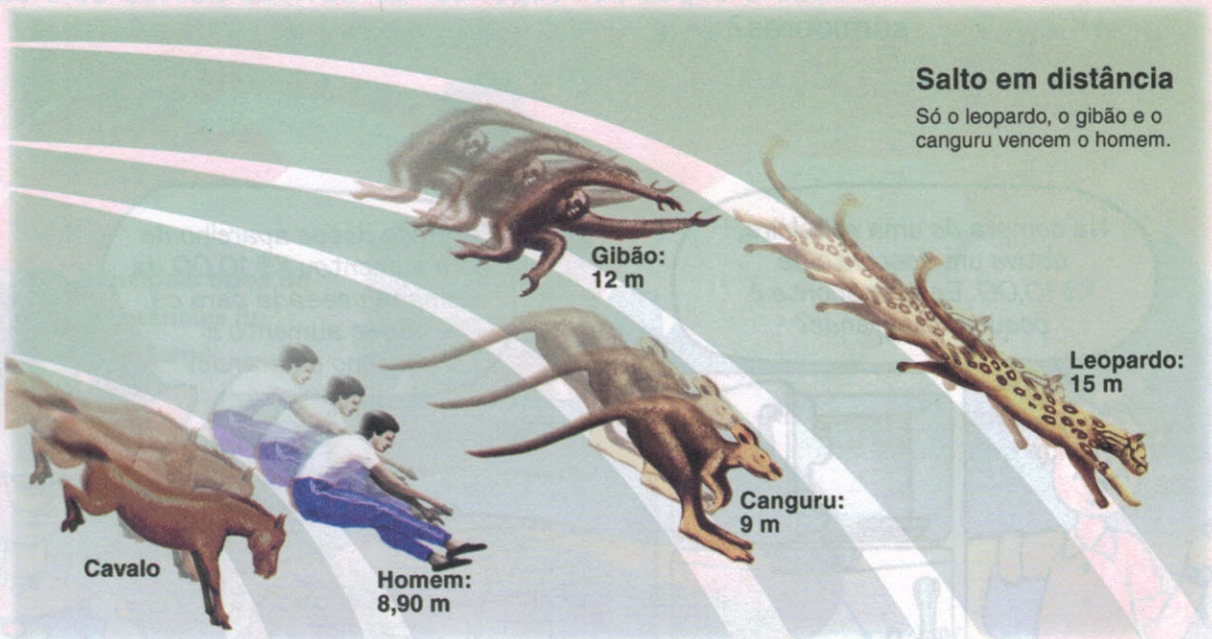


JORNAIS & REVISTAS

A revista *Superinteressante* de março de 1996, no artigo "Proteínas ajudam a pular melhor", sobre o salto em distância, revelou que um salto depende, entre outras coisas, da ação de proteínas. Leia um trecho:

> Nos vertebrados, a potência muscular é medida pelo número de fibras e o volume do músculo. Quanto maior, melhor. Mas eles também dependem de duas proteínas fundamentais: fosfocreatina e ATP (adenosina trifosfato), que armazenam e transformam energia química em mecânica, no momento em que o cérebro envia o comando ao músculo para concentrar esforço e tomar impulso.

Veja o gráfico do salto em distância do homem e de alguns animais.



Observando o gráfico e sabendo que a distância que salta o cavalo, representada por x, vale $2x + \frac{x}{10} = \left(\frac{21}{5}\right)^2$, responda:

1. Qual o valor de x?

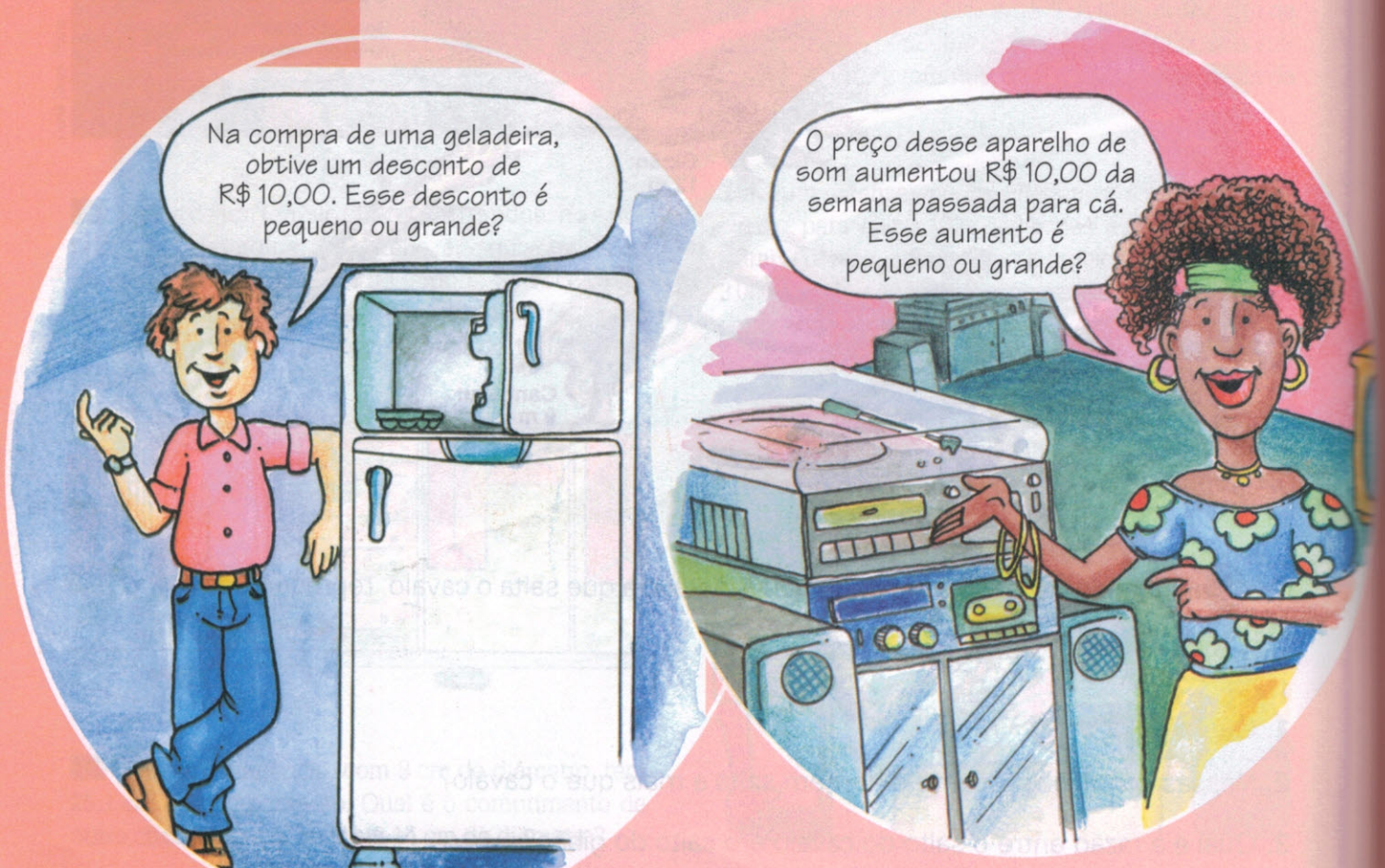
2. Nessas condições, quanto o homem salta a mais que o cavalo?

3. Qual é a razão entre o salto do cavalo e o salto do gibão?

8

Porcentagem e juro simples

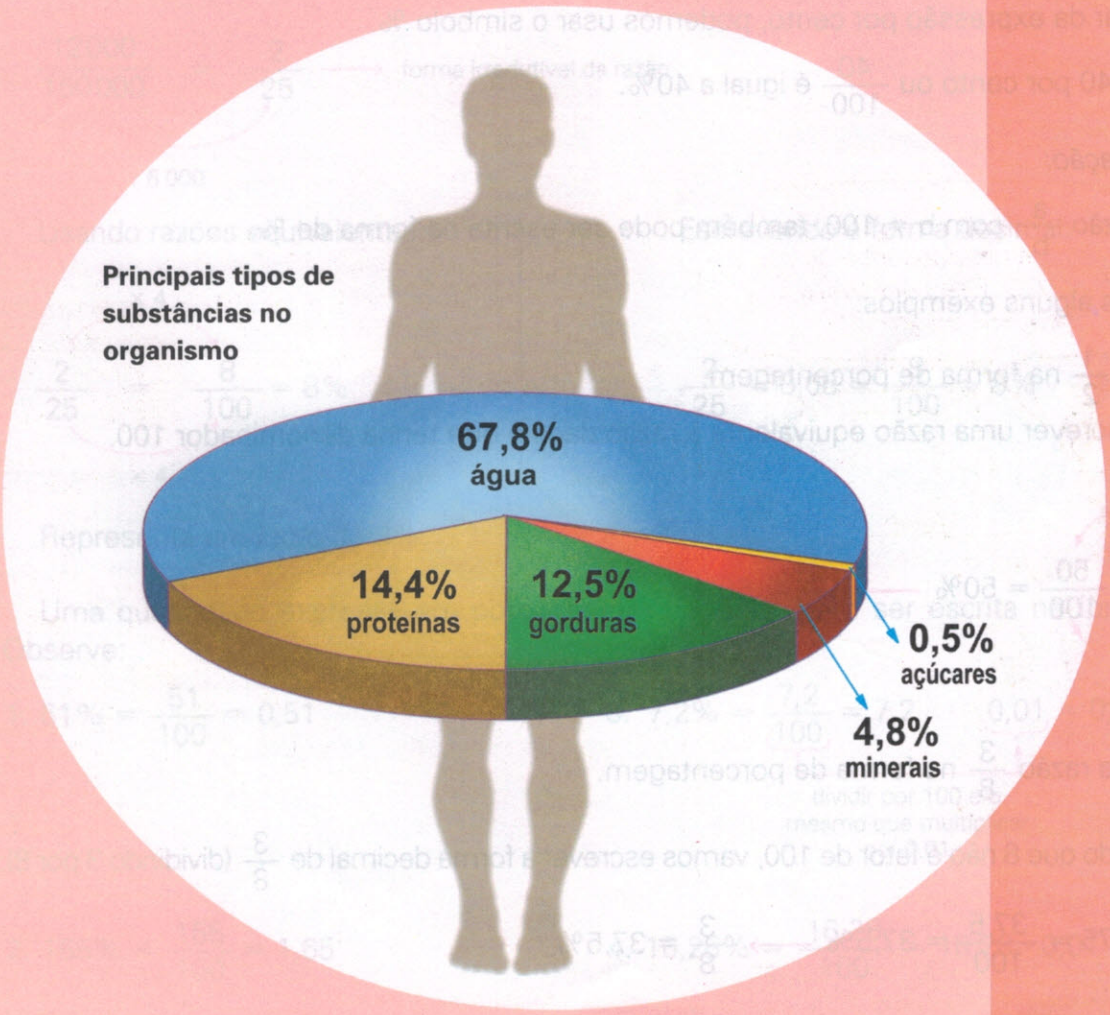
Você é capaz de responder às dúvidas destes dois consumidores?



Para responder a essas dúvidas, você precisa conhecer o preço da mercadoria antes do aumento ou antes do desconto. Vamos supor, para as duas situações, que a mercadoria custasse R$ 700,00. Nesse caso, é claro que o aumento ou o desconto de R$ 10,00 seria considerado pequeno, pois eles representariam $\frac{1}{70}$ do preço da mercadoria. Porém, se a mercadoria custasse R$ 70,00, tanto o aumento como o desconto seriam considerados muito grandes, pois representariam $\frac{1}{7}$ do preço da mercadoria. Basicamente, nas duas situações, o que você faz é uma comparação entre dois valores.

Um modo bastante usado na vida diária para comparar dois valores é a *porcentagem*, cujo estudo retomamos e aprofundamos nesta Unidade.

Veja um exemplo no gráfico publicado pelo jornal *Folha de S. Paulo*, que mostra, em porcentagem, algumas substâncias que aparecem no nosso organismo.



48 PORCENTAGEM

Praticamente todos os dias você vê na televisão ou lê nos jornais alguma coisa relacionada com a expressão *por cento*.

Você já sabe o que essa expressão representa, pois esse assunto vem sendo estudado desde a 4ª série.

A expressão por cento vem do latim *per centum*, que quer dizer *por um cento*. Assim, quando você lê ou escuta uma afirmação como "Grande liquidação de verão na loja *X*: 40 por cento de desconto em todos os artigos", significa que você tem um desconto de 40 reais para cada 100 reais do preço de um artigo.

Isto nos leva, então, a estabelecer a razão $\frac{40}{100}$.

Podemos, então, dizer que:

Toda razão $\frac{a}{b}$, na qual b = 100, chama-se *taxa de porcentagem*.

Assim: 40 por cento é o mesmo que $\frac{40}{100}$.

Em lugar da expressão por cento, podemos usar o símbolo %.

Assim: 40 por cento ou $\frac{40}{100}$ é igual a 40%.

Observação:

Uma razão $\frac{a}{b}$, com $b \neq 100$, também pode ser escrita na forma de %.

Vejamos alguns exemplos:

1. Escrever $\frac{1}{2}$ na forma de porcentagem.

Vamos escrever uma razão equivalente à razão dada e que tenha denominador 100.

$$\frac{1}{2} \overset{\times 50}{=} \frac{50}{100} = 50\% \longrightarrow \frac{1}{2} = 50\%$$

2. Escrever a razão $\frac{3}{8}$ na forma de porcentagem.

Observando que 8 não é fator de 100, vamos escrever a forma decimal de $\frac{3}{8}$ (dividindo 3 por 8):

$$\frac{3}{8} = 0{,}375 = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\% \longrightarrow \frac{3}{8} = 37{,}5\%$$

3. Um desconto de 7 mil reais sobre um preço de 25 mil reais representa quantos por cento de desconto?

Inicialmente temos a razão $\frac{7}{25}$.

Usando razões equivalentes

$$\frac{7}{25} \overset{\times 4}{=} \frac{28}{100} = 28\%$$

Escrevendo a forma decimal

$$\frac{7}{25} = 0{,}28 = \frac{28}{100} = 28\%$$

Representa 28% de desconto.

4. Um lucro de 12 mil reais sobre um preço de 150 mil reais representa quantos por cento de lucro?

Inicialmente, escrevemos a razão $\frac{12000}{150000}$.

$$\frac{12000}{150000} \overset{:6000}{=} \frac{2}{25}$$ → forma irredutível da razão

Usando razões equivalentes:

$$\frac{2}{25} \overset{\times 4}{=} \frac{8}{100} = 8\%$$

Escrevendo a forma decimal:

$$\frac{2}{25} = 0{,}08 = \frac{8}{100} = 8\%$$

Representa um lucro de 8%.

Uma quantidade expressa em porcentagem pode também ser escrita na forma decimal. Observe:

1. $51\% = \frac{51}{100} = 0{,}51$

2. $165\% = \frac{165}{100} = 1{,}65$

3. $7{,}2\% = \frac{7{,}2}{100} = 7{,}2 \cdot 0{,}01 = 0{,}072$

dividir por 100 é o mesmo que multiplicar por 0,01

4. $16{,}28\% = \frac{16{,}28}{100} = 16{,}28 \cdot 0{,}01 = 0{,}1628$

FIXAÇÃO

1 Numa pesquisa de opinião sobre a próxima eleição para prefeito, foram ouvidas 100 pessoas. Dessas, 29 manifestaram a intenção de votar no candidato *A*. Escreva, em forma de porcentagem, a quantidade de pessoas entrevistadas que votarão no candidato *A*.

2 Oscar é um jogador de basquete que acerta, em média, 75% dos arremessos que faz à cesta. Qual é o significado dessa afirmação?

3 Após um *show* musical produzido por um canal de televisão, foram entrevistadas 100 pessoas. O resultado da pesquisa está no quadro seguinte:

Opinião	Nº de pessoas
ótimo	42
bom	37
regular	10
ruim	6
não assistiram	5

Observe o quadro e escreva a porcentagem correspondente a cada uma das opiniões.

4 Escreva a porcentagem correspondente a cada uma das seguintes razões:

a) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{17}{20}$ e) $\frac{9}{4}$

b) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{5}{8}$ f) $\frac{5}{2}$

5 Escreva, na forma irredutível, a razão correspondente a:

a) 60% c) 55% e) 75%

b) 150% d) 15% f) 45%

6 Um aumento de 90 reais sobre um preço de 200 reais representa quantos por cento de aumento?

7 Um aluno acertou 38 das 50 questões que tinha para resolver. Esse acerto representa quantos por cento?

8 A falta de 7 alunos em um grupo de 20 alunos representa quantos por cento de falta?

9 Um desconto de 17 mil reais sobre um preço de 50 mil reais representa quantos por cento de desconto?

10 Eu sou o Roberto. Veja no quadro todo o pessoal da minha turma:

Nome	Cor de cabelo
Roberto	louro
Luciana	preto
Ester	louro
Rafael	ruivo
Toninho	preto
Mariana	preto
Sérgio	louro
Décio	preto
Ana	ruivo
Tito	preto

a) Quantas crianças fazem parte da minha turma?

b) Qual a porcentagem de meninos?

c) Qual a porcentagem de meninas?

d) Qual a porcentagem de crianças de cabelo preto?

e) Qual a porcentagem de crianças louras?

f) Qual a porcentagem de crianças não-ruivas?

g) Qual a porcentagem de crianças não-louras?

11 Escreva as seguintes porcentagens na forma decimal:

a) 1% d) 21% g) 260%

b) 9% e) 59% h) 2,4%

c) 16% f) 64% i) 20,4%

12 Escreva os seguintes números decimais inicialmente na forma de razão de denominador 100 e, a seguir, na forma de porcentagem:

a) 0,06 e) 2,14

b) 0,10 f) 0,085

c) 0,27 g) 0,013

d) 0,5 h) 0,215

Resolvendo problemas com porcentagem

Consideremos as seguintes situações:

1ª Em um jogo de basquete, Oscar cobrou 20 lances livres, dos quais acertou 65%. Quantos lances livres ele acertou?

Este problema se resume em calcular 65% de 20.

Sabemos que $65\% = \frac{65}{100} = 0{,}65$.

Representando por x o número de acertos, temos a equação:

$x = 65\%$ de 20

$x = 0{,}65 \cdot 20$

$x = 13$

Cálculo:
$$\begin{array}{r} 0{,}65 \\ \times\ \ 20 \\ \hline 13{,}00 \end{array}$$

Oscar acertou 13 lances livres.

2ª Durante o ano de 1997, uma equipe de basquete disputou 75 jogos, dos quais venceu 63. Qual é a taxa de porcentagem correspondente aos jogos que essa equipe venceu?

Vamos indicar por x o número que representa essa porcentagem. De acordo com o problema, podemos escrever:

$x \cdot 75 = 63$

$75x = 63$

$x = \frac{63}{75}$

$x = 0{,}84$ ou $\frac{84}{100}$ ou 84%

Cálculo:
$$\begin{array}{r|l} 630 & 75 \\ 300 & 0{,}84 \\ 00 & \end{array}$$

A equipe venceu 84% dos jogos que disputou.

3ª Comprei 60 figurinhas e aproveitei apenas 45 em meu álbum. As restantes eram repetidas. Qual foi a taxa de porcentagem de figurinhas repetidas?

Vamos calcular quantas figurinhas eram repetidas:

$60 - 45 = 15$

Representando por x o número que indica a porcentagem procurada, montamos a equação:

$x \cdot 60 = 15$

$60x = 15$

$x = \frac{15}{60}$

$x = 0{,}25$ ou $\frac{25}{100}$ ou 25%

Cálculo:
$$\begin{array}{r|l} 150 & 60 \\ -\ 120 & 0{,}25 \\ \hline 0300 & \text{U d c} \\ -\ \ 300 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

Então, 25% das figurinhas que comprei eram repetidas.

4ª Em um colégio, 1 400 alunos estudam no período da manhã. Esse número representa 56% do número de alunos que estudam nesse colégio. Quantos alunos estudam, ao todo, nesse colégio?

Vamos representar por x o número total de alunos do colégio.

Sabendo que $56\% = \frac{56}{100} = 0{,}56$, podemos escrever a equação:

56% de x é igual a 1 400, ou seja:

$0{,}56 \cdot x = 1\,400$

$0{,}56x = 1\,400$

$x = \frac{1\,400}{0{,}56}$

$x = 2\,500$

Cálculo:

$1\,400 : 0{,}56 = 140\,000 : 56$

140 000	56
280	2 500
0000	

No colégio estudam ao todo 2 500 alunos.

5ª Na compra de um objeto, obtive um desconto de 15%. Paguei, então, 76,50 reais pelo objeto. Nessas condições, qual era o preço original desse objeto?

Como obtive um desconto de 15%, paguei o correspondente a $100\% - 15\% = 85\%$ do objeto.

Indicando o preço original por x, podemos escrever:

85% de x é igual a 76,50, ou seja:

$0{,}85 \cdot x = 76{,}50$

$0{,}85x = 76{,}50$

$x = \frac{76{,}50}{0{,}85}$

$x = 90$

Cálculo:

$76{,}50 : 0{,}85 = 7\,650 : 85$

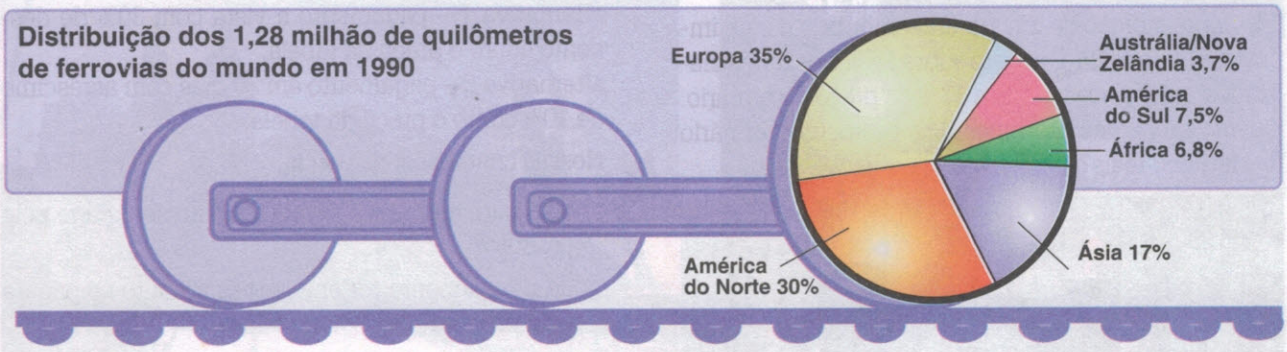
7 650	85
000	90

O preço original do objeto era 90 reais.

Explorando Gráficos

No início do século XX o transporte ferroviário atingia seu auge. Depois da Segunda Guerra Mundial a Rússia foi um dos poucos países a continuar investindo na expansão do transporte ferroviário. O advento dos trens de alta velocidade, no Japão e na Europa, no final dos anos 70, deram um novo impulso aos transportes ferroviários.

Observe no gráfico abaixo a distribuição dos 1,28 milhão de quilômetros de ferrovias do mundo, em 1990:



(Fonte: Nosso Tempo – A Cobertura Jornalística do Século – *Jornal da Tarde*)

Com base no gráfico, responda:

1. Quantos quilômetros de ferrovias pertencem à América do Norte?
2. Quantos quilômetros de ferrovias pertencem à América do Sul?
3. Qual a razão entre o número de quilômetros de ferrovias da América do Norte em relação à América do Sul?

FIXAÇÃO

1 Calcule 41% de 54 000 votos.

2 Qual a quantia que representa 22,7% de 110 000 reais?

3 A quantia de 1 143 reais representa quantos por cento de 2 540 reais?

4 O número 1 702 representa quantos por cento do número 4 600?

5 Um aumento de 486 reais sobre um preço de 1 350 reais representa quantos por cento de aumento?

6 Os 44% de uma quantia correspondem a 330 reais. Qual é a quantia?

7 Sabe-se que 37,5% de uma distância x corresponde a 600 m. Qual é a distância x?

8 Uma escola tem 25 professores, dos quais 24% ensinam Matemática. Quantos professores ensinam Matemática nessa escola?

9 Uma equipe de basquete venceu 26 do total das partidas que disputou em um torneio de classificação. Esse número corresponde a 65% do número de partidas que o clube disputou nessa fase. Nessas condições:

a) Quantas partidas esse equipe disputou na fase de classificação?

b) Quantas partidas essa equipe perdeu nessa fase?

10 Um professor de Educação Física organiza um acampamento de férias. Dos candidatos que fizeram a pré-inscrição, 27 não a confirmaram. Os alunos que confirmaram a sua ida representam 55% do número de alunos que se inscreveram inicialmente. Nessas condições, pede-se:

a) o número inicial de alunos que se inscreveram.

b) o número de alunos que confirmaram a sua inscrição.

11 Sobre o preço de um armário embutido há um imposto chamado IPI (Imposto sobre Produtos Industrializados), que corresponde a 17% do preço do armário. Quanto se pagará de imposto se o preço do armário for de 1 650 reais?

Stefan Kolumban/Pulsar

12 A 6ª série *A* tem 40 alunos. Destes, somente 26 já têm 12 anos completos. Nessas condições, pede-se:

a) a porcentagem dos alunos que já completaram 12 anos.

b) a porcentagem dos alunos que ainda não completaram 12 anos.

13 Sabe-se que 40 g de uma substância chamada óxido de magnésio contém 24 g de magnésio. Qual é a porcentagem de magnésio que existe no óxido de magnésio?

14 A área do terreno *A* é 930 m^2, enquanto a área do terreno *B* é 1 500 m^2. Nessas condições, a área do terreno *A* representa quantos por cento da área do terreno *B*?

15 Numa cidade, a população é de 55 000 habitantes. Desses, 18% têm mais de 50 anos. Nessas condições, quantos habitantes dessa cidade têm:

a) mais de 50 anos?

b) menos de 50 anos?

16 Com uma lata de tinta é possível pintar 50 m^2 de parede. Para pintar uma parede de 72 m^2, gasta-se uma lata e mais uma parte de uma segunda lata. Qual a porcentagem que corresponde à parte que se gasta da segunda lata?

17 O preço de um produto é de 420 reais. O vendedor propõe a um comprador as seguintes alternativas de pagamento:

alternativa 1 – pagamento a vista com 30% de desconto sobre o preço da tabela.
alternativa 2 – pagamento em 30 dias com acréscimo de 10% sobre o preço da tabela.

Nessas condições, responda:

a) Se o pagamento for a vista, quanto será pago pelo produto?

b) Se o pagamento for em 30 dias, quanto se pagará pelo produto?

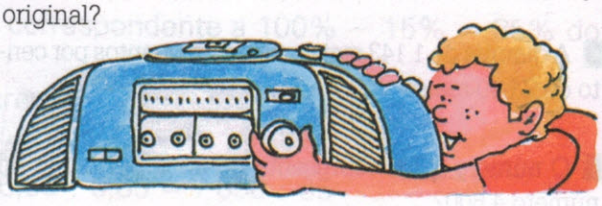
c) Qual a diferença entre essas quantias?

d) Ela representa quantos por cento do preço do produto?

18 Na 6ª série de um colégio há 15 meninas e 10 meninos. Dê a porcentagem de meninas e de meninos dessa classe.

19 Dois meninos discutem sobre a campanha de seus clubes de futebol em um campeonato. O clube do menino *A* ganhou 24 jogos dos 30 jogos que disputou, enquanto o clube do menino *B* ganhou 21 dos 28 jogos que disputou. Qual dos dois clubes apresenta melhor campanha, em porcentagem?

20 Na compra de um aparelho de som obtive um desconto de 15% por ter feito o pagamento a vista. Se paguei 102 reais pelo aparelho, qual era o seu preço original?



21 Uma mesma mercadoria é vendida em duas lojas nas seguintes condições:
loja 1 – preço de 120 reais, com 20% de desconto;
loja 2 – preço de 140 reais, com 30% de desconto.
Em qual das lojas a mercadoria pode ser comprada pelo preço mais baixo?

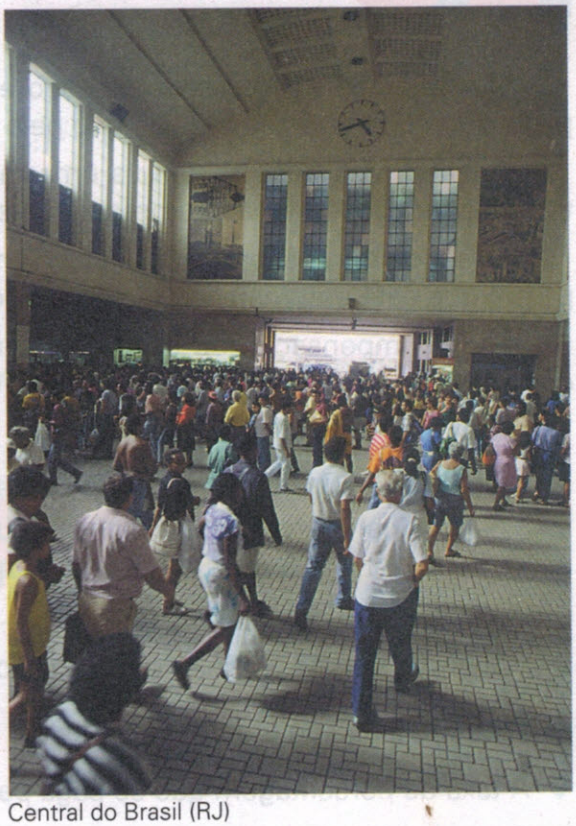
Marco Antonio Sá/Kino

Explorando Medidas

As ferrovias foram muito importantes no desenvolvimento de vários países.

Marco Antonio Sá/Kino

Estação da Luz (SP)

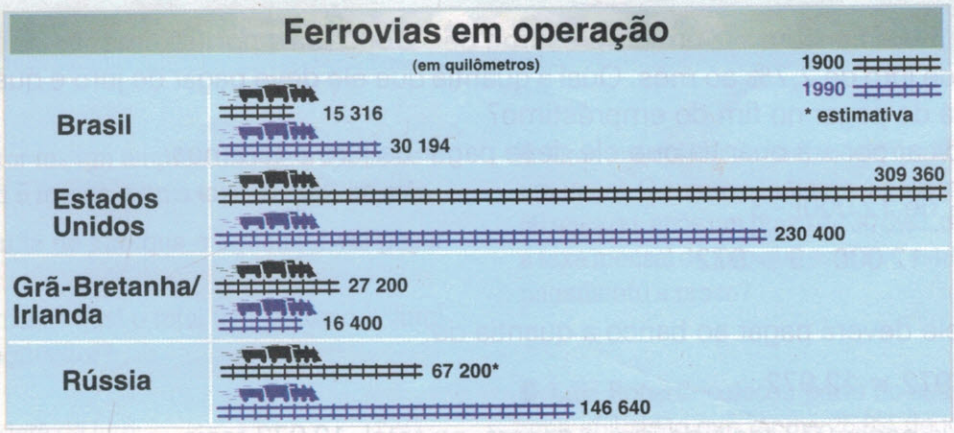


Carlos Goldgrub/Reflexo

Central do Brasil (RJ)

Em sua cidade há transporte ferroviário?

Observe a comparação entre o número de quilômetros de ferrovias em operação, em alguns países, em 1900 e em 1990:



(Fonte: Nosso Tempo – A Cobertura Jornalística do Século – *Jornal da Tarde*)

1. De 1900 a 1990, qual foi o aumento percentual na rede ferroviária brasileira?
2. Qual foi, no mesmo período, o decréscimo percentual na rede ferroviária da Grã-Bretanha/Irlanda?
3. Das redes acima, qual teve o maior aumento percentual nesse período?
4. Qual teve o maior decréscimo percentual?
5. Que aumento percentual a rede brasileira deveria ter em 1990 para se igualar, em número de quilômetros, à rede dos Estados Unidos?

49 JURO SIMPLES

Quando uma pessoa pede dinheiro emprestado a uma outra pessoa ou a um banco, ela paga uma compensação em dinheiro pelo tempo que fica com o dinheiro emprestado.

Quando uma pessoa compra uma mercadoria a prestação, ela paga um acréscimo pelo tempo correspondente ao número de prestações.

Quando uma pessoa aplica dinheiro em um banco, ela recebe uma compensação pelo tempo em que está emprestando o dinheiro ao banco.

Essa compensação ou esse acréscimo a que estamos nos referindo chama-se *juro* e corresponde sempre a uma porcentagem do valor do empréstimo ou da compra.

Assim, podemos dizer que:

> Toda compensação em dinheiro que se paga ou que se recebe pela quantia em dinheiro que se empresta ou que se pede emprestado é chamada *juro*.

Quando falamos em juro, devemos considerar:

- O dinheiro que se empresta ou que se pede emprestado chama-se *capital*.
- A taxa de porcentagem que se paga pelo aluguel do dinheiro chama-se *taxa de juro*.
- O total que se paga no final do empréstimo (capital + juro) chama-se *montante*.

Vejamos alguns exemplos envolvendo juro:

1. Carlos vai a um banco e faz um empréstimo de 12 000 reais por três meses. É estabelecida uma taxa de juro de 2,7% ao mês. Qual a quantia que ele deve pagar de juro e qual o total que Carlos terá de pagar no fim do empréstimo?
Vamos indicar por x a quantia que ele deve pagar de juro e teremos:

$x = (2{,}7\% \text{ de } 12\,000) \cdot 3$

$x = 0{,}027 \cdot 12\,000 \cdot 3 = 972$

Ao todo, ele deverá pagar ao banco a quantia de:

$12\,000 + 972 = 12\,972$

Carlos deve pagar 972 reais de juro e pagará, no total, 12 972 reais.

2. Um aparelho eletrônico custa 620 reais a vista. Em 5 prestações mensais, o preço passa a ser de 868 reais. Sabendo-se que a diferença entre os preços é devida ao juro, qual é a taxa de juro cobrada ao mês por essa loja?

Vamos calcular a diferença entre o preço a prazo e o preço a vista:

$868 - 620 = 248$ (juro em 5 meses)

Vamos, então, determinar o valor do juro em cada mês:

$248 : 5 = 49{,}60$

Finalmente, representando por x a taxa de juro, vamos escrever:

$x \cdot 620 = 49{,}60$

$620x = 49{,}60$

$$x = \frac{49{,}60}{620} = 0{,}08$$

$$0{,}08 = \frac{8}{100} = 8\%$$

A taxa é de 8% ao mês.

3. Uma aplicação feita durante 2 anos, a uma taxa de 18% ao ano, rendeu 1 800 reais de juro. Qual foi a quantia aplicada?

Vamos, inicialmente, determinar quanto rendeu de juro por ano:

$1\,800 : 2 = 900$

Representando a quantia aplicada por x, podemos escrever:

18% de x dá 900.

$0{,}18x = 900$

$$x = \frac{900}{0{,}18} = 5\,000$$

A quantia aplicada foi de 5 000 reais.

É importante notar que todas essas situações se referem ao cálculo de *juro simples*.

FIXAÇÃO

1 Um agricultor fez um empréstimo de 5 200 reais e vai pagá-lo em 5 meses, a uma taxa de 1,5% ao mês.

a) Qual a quantia de juro que o agricultor vai pagar por mês?

b) Após os 5 meses qual o total (empréstimo + juro) pago pelo agricultor?

2 Quanto renderá de juro:

a) a quantia de 1 800 reais, aplicada durante 5 meses a uma taxa de 2,3% ao mês?

b) a quantia de 2 450 reais, aplicada durante 2 meses a uma taxa de 1,96% ao mês?

3 Uma aplicação de 40 000 reais rendeu, em 3 meses, 3 000 reais de juro. Qual a taxa mensal de juro?

4 Uma loja colocou o anúncio de um liquidificador em um jornal. O anúncio indicava o pagamento à vista de 60 reais ou, após um prazo de 30 dias, de 69 reais. Qual a taxa mensal de juro que essa loja está cobrando para pagamento a prazo?

5 Luís Roberto colocou parte do seu 13º salário em uma aplicação que rendia 25,6% de juro ao ano. Sabendo-se que após dois anos ele recebeu 389,12 reais de juro, qual foi a quantia que ele aplicou?

6 Um comerciante resolveu parcelar a dívida de um freguês em duas vezes, cobrando, porém, juro de 1,9% ao mês. Se o freguês pagou um total de 931 reais de juro, qual era o valor da sua dívida?

RETOMANDO o que aprendeu

1 Quando o preço de um objeto aumenta de $\frac{1}{4}$ sobre o preço anterior, a quantos por cento corresponde esse aumento?

2 O desconto do INSS corresponde a 9,5% do salário de uma pessoa. A quanto corresponde esse desconto para quem tem um salário de 1 620 reais?

3 Comprei um aparelho por 2 050 reais e o vendi com um lucro de 30%. Nessas condições, responda:

a) A quanto corresponde o meu lucro?
b) Por quanto vendi esse aparelho?

4 A América do Sul tem uma superfície de 18 000 000 km², aproximadamente. O Brasil tem uma superfície aproximada de 8 500 000 km². Qual a porcentagem que a superfície brasileira representa em relação à superfície da América do Sul?

5 Por aquecimento, o comprimento de uma barra de ferro aumenta $\frac{7}{2000}$ em relação ao valor inicial. Qual é o aumento do comprimento em porcentagem?

6 Um par de sapatos custa 58 reais e sofre um aumento de 20%. Durante uma promoção, a loja passa a oferecer o sapato com 20% de desconto, para pagamento a vista. Qual é o preço desse sapato durante a promoção?

7 Quanto representa 30% de 40%?

8 Sabe-se que o volume de uma bexiga aumentou $\frac{2}{5}$ em relação ao seu valor inicial. De quantos por cento é o aumento do volume dessa bexiga?

9 Um fichário tem 25 fichas numeradas. Sabendo-se que dessas fichas 13 têm números ímpares, pergunta-se:

a) Qual é a porcentagem de números ímpares nesse fichário?
b) E de números pares?

10 O preço a vista de um aparelho é 3 050 reais. Em 3 vezes, o preço passa a ser 4 514 reais. Qual é a taxa mensal de juro cobrada por essa loja?

11 Francisco vendeu uma moto por 16 800 reais. Com isso ele teve um lucro de 12%. Quanto ele pagou pela moto?

12 Uma passagem de ônibus intermunicipal passou de 9 reais para 11,70 reais. Qual foi a porcentagem do aumento?

13 A área de um retângulo, como você já sabe, é obtida multiplicando-se o comprimento pela largura. Um retângulo tem 40 cm de comprimento por 25 cm de largura. Se você aumentar o comprimento em 25% e a largura em 20%, a área do novo retângulo aumentará de quantos por cento em relação ao retângulo original?

14 Um recipiente contém uma mistura de leite natural e de leite de soja, num total de 200 litros. Sabe-se que 50 litros são de leite natural. Quantos litros de leite de soja devem ser acrescentados à mistura para que a quantidade de leite natural represente 20% do total?

15 O volume de uma caixa-d'água em forma de bloco retangular é calculado pelo produto das suas três dimensões. Uma caixa-d'água tem 3,5 m de comprimento; 2,5 m de largura e 2 m de altura e contém água até 80% da sua capacidade total. Quantos litros de água faltam para encher totalmente essa caixa-d'água? (Lembre-se de que 1 m³ = 1 000 ℓ.)

16 A 6ª série *A* tem 35 alunos, entre meninos e meninas. Num determinado dia faltaram 3 meninos e o número de meninos presentes passou a ser igual a 60% do número de meninas. Nessas condições, quantos meninos estudam nessa classe?

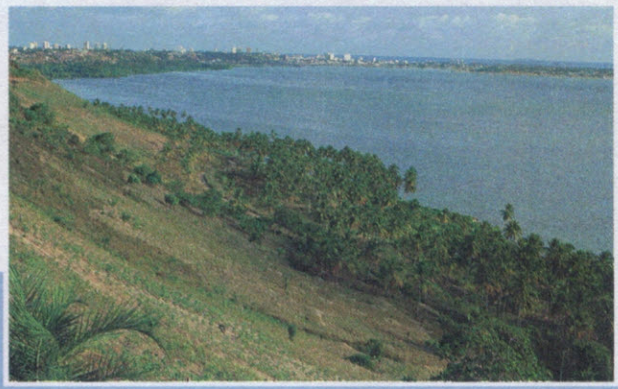
17 A área de um quadrado é dada pelo quadrado da medida do lado. Um quadrado tem 9 cm de lado e sua área corresponde a 45% da área de um retângulo. Nessas condições, responda:

a) Qual é a área do retângulo?
b) Se o comprimento desse retângulo é 18 cm, qual é a sua largura?

18 Qual é o número decimal que representa 50% do quadrado de 10%?

JORNAIS & REVISTAS

A tabela abaixo foi publicada na revista *Veja* em 18/03/98. Ela nos mostra as cidades mais procuradas pelos turistas brasileiros em 1997, segundo levantamento em 150 agências de viagem.



Fotos: Manoel Novaes/FTD

Fortaleza	26%
Porto Seguro	23%
Rio de Janeiro	21%
Cidades do sul	8%
Natal	7%
Maceió	4%
Outras	11%

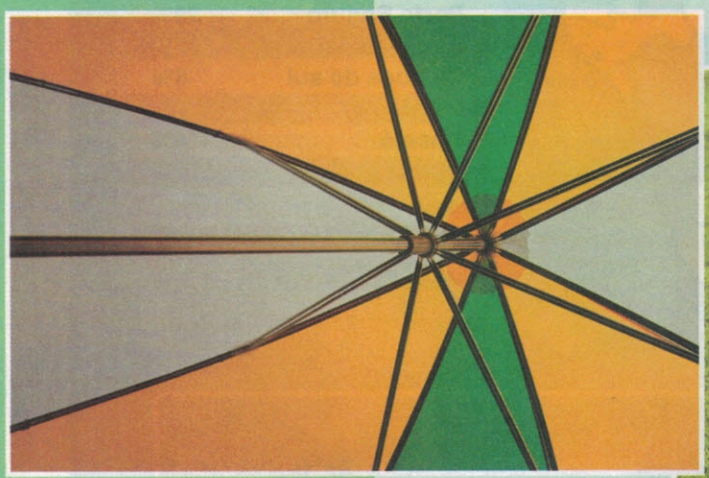
Fonte:
Associação Brasileira de Agências de Viagens

- Supondo que 754 000 brasileiros visitaram Fortaleza, com base na tabela, responda:
  a) quantos visitaram o Rio de Janeiro?
  b) quantos viajaram para as cidades do Sul?

9

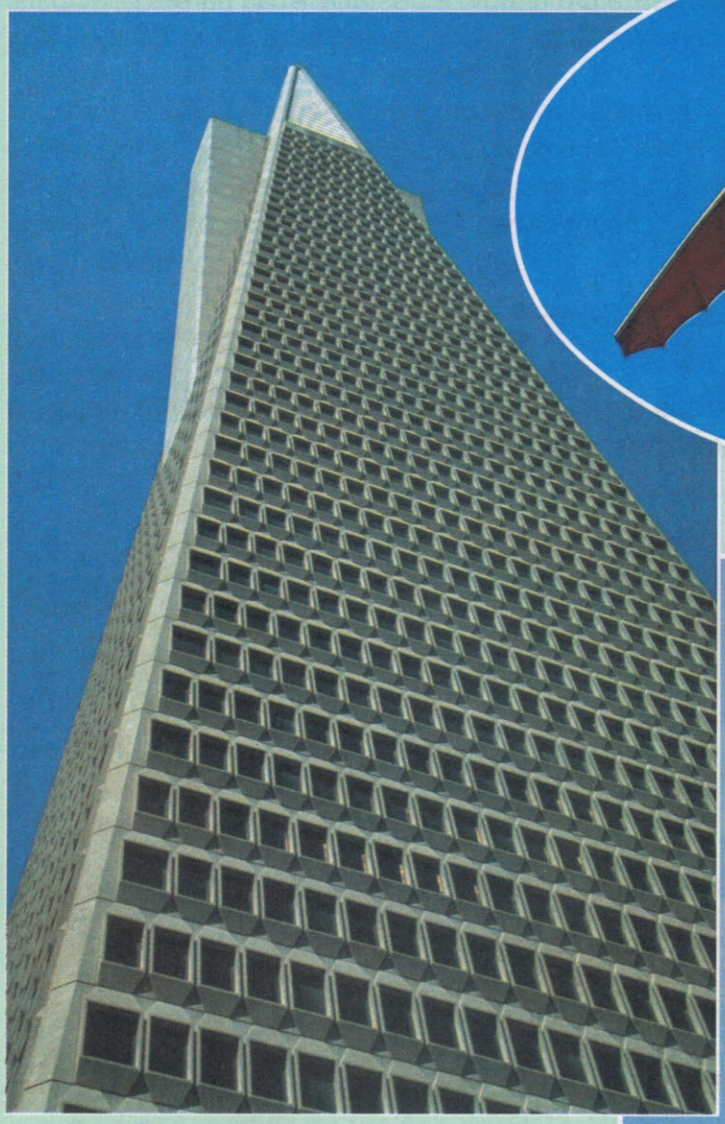
Estudando os ângulos

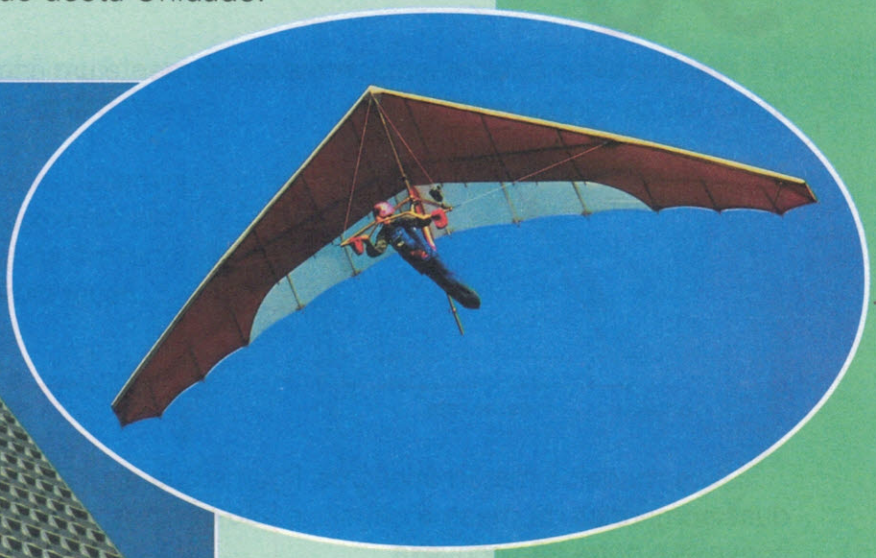
Podemos ter a idéia de ângulos observando muitos dos objetos que nos rodeiam.

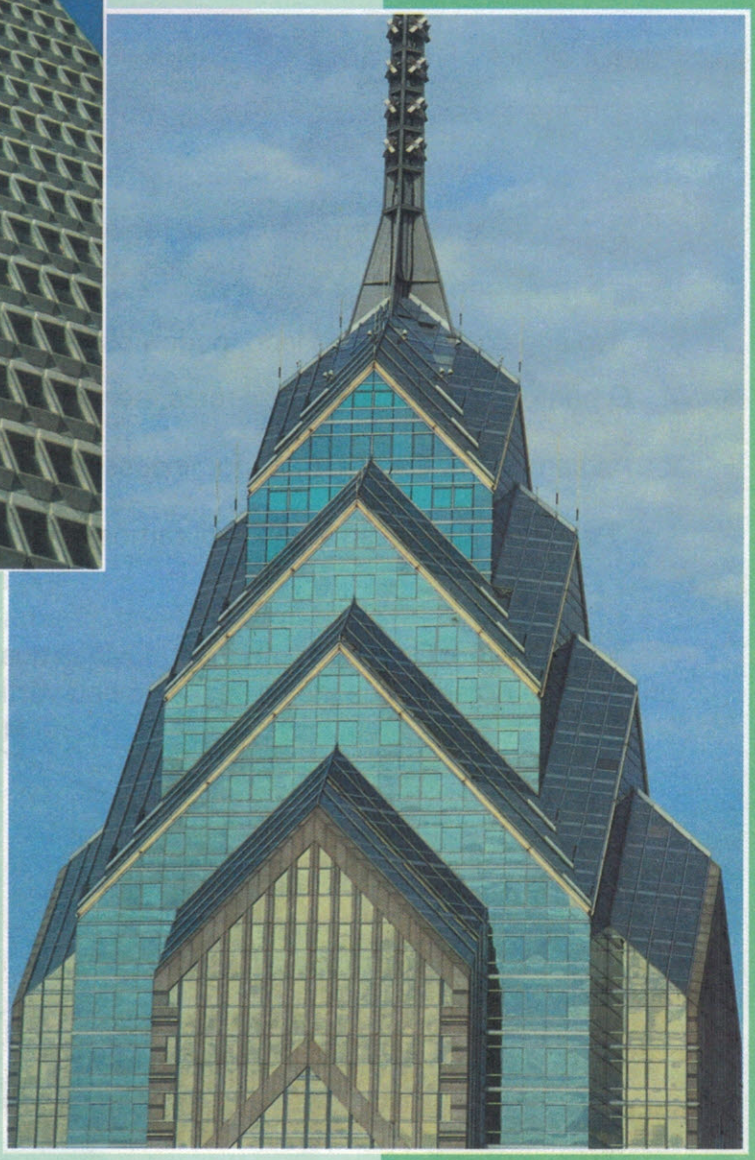


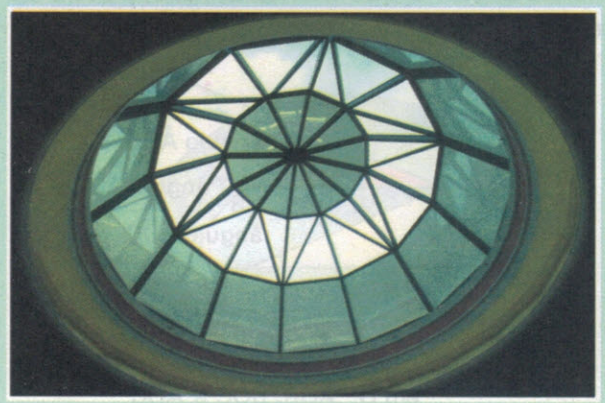
Em algumas atividades, os ângulos assumem uma grande importância: na engenharia, na fabricação de móveis, na construção de rampas, no artesanato, na pintura e no desenho.

Ângulos são o objeto de estudo desta Unidade.



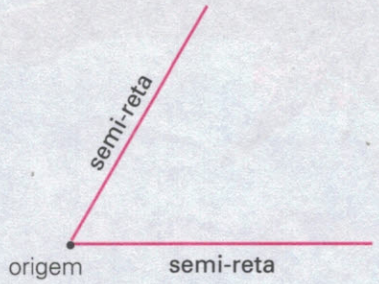


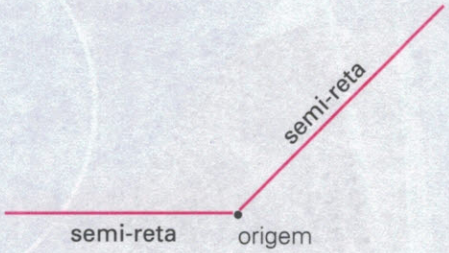




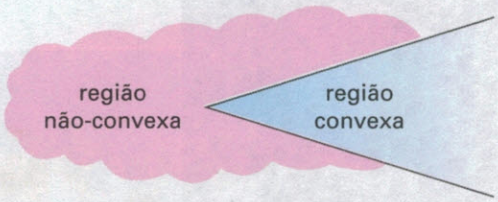
50 O ÂNGULO E SEUS ELEMENTOS

Veremos como representar matematicamente um ângulo e destacar suas partes principais, utilizando os modelos abaixo:



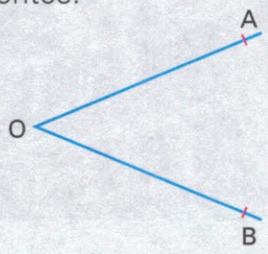


Nos modelos matemáticos de figuras que sugerem a idéia de ângulo, podemos destacar duas semi-retas de mesma origem e não-opostas, que dividem o plano em duas regiões: uma convexa e outra não-convexa.



Denominamos ângulo a região convexa formada por duas semi-retas não-opostas que têm a mesma origem.

No ângulo da figura ao lado, podemos destacar os seguintes elementos:



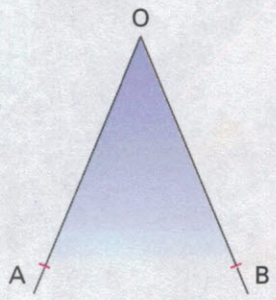
✓ O ponto *O*, origem das semi-retas, denominado *vértice* do ângulo.

✓ As semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, denominadas *lados* do ângulo.

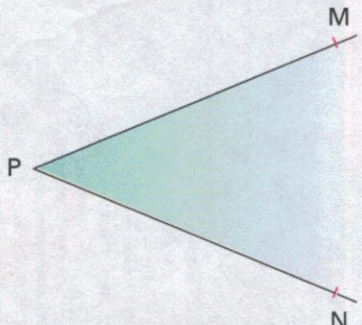
Para identificar esse ângulo utilizamos a notação $A\hat{O}B$.

vértice do ângulo

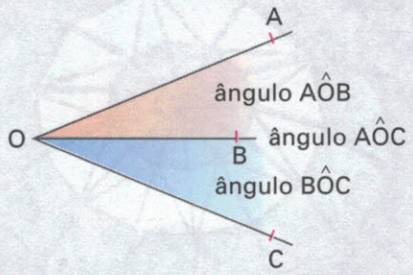
Observação: Quando não houver dúvidas quanto ao ângulo a que nos referimos, podemos utilizar uma notação que indica apenas o seu vértice.



ângulo $\hat{O}$ ou $A\hat{O}B$



ângulo $\hat{P}$ ou $M\hat{P}N$



Nesse caso, há três ângulos com vértices em *O*: $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C$.

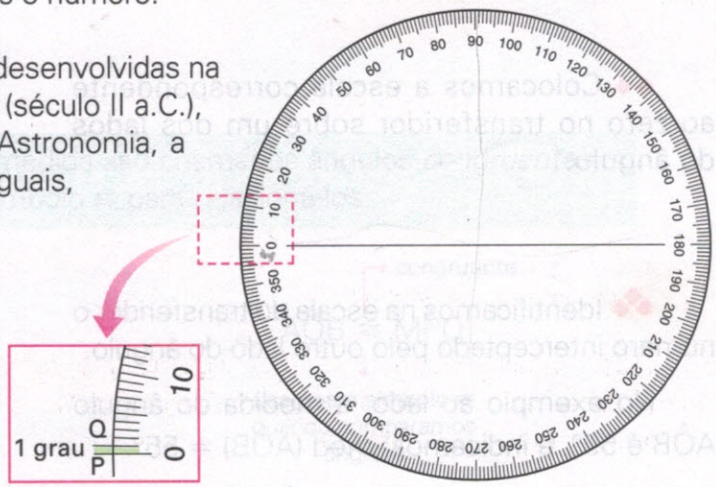
51 MEDIDA DE UM ÂNGULO

A medida de um ângulo é dada pela medida de sua abertura, e a unidade padrão utilizada é o *grau*, que se representa pelo símbolo ° após o número.

Vamos ver o que representa o grau.

As primeiras noções de ângulo foram desenvolvidas na Grécia antiga. Deve-se a Hiparco de Nicéia (século II a.C.), considerado pelos gregos como o pai da Astronomia, a primeira divisão do círculo em 360 partes iguais, com o objetivo de medir ângulos.

A cada um desses 360 arcos em que a circunferência foi dividida associamos um ângulo cuja medida chamaremos de 1 grau.

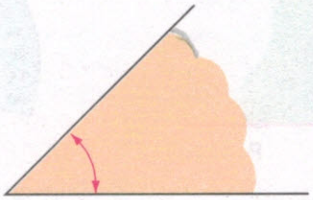


O grau é uma unidade de medida de ângulo; 1 grau corresponde à medida do ângulo (com vértice no centro da circunferência) associado a um arco de $\frac{1}{360}$ da circunferência.

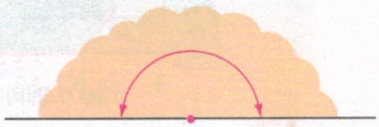
Exemplos:

1° ou 1 grau

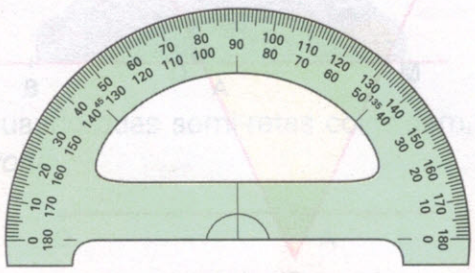
45° ou 45 graus



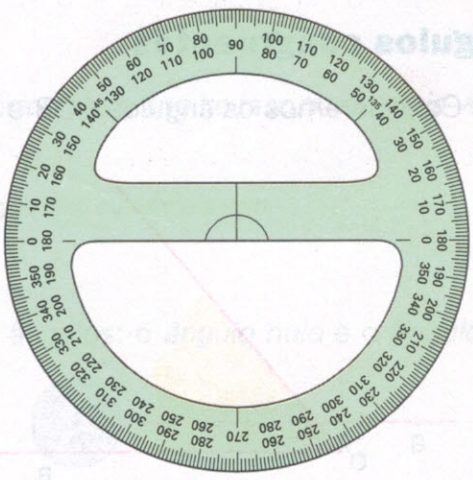
180° ou 180 graus



Assim, para medir um ângulo, comparamos sua medida à medida de um ângulo de 1°. Na prática, utilizamos um instrumento de medida chamado transferidor. O transferidor já vem graduado com divisões de 1° em 1°.



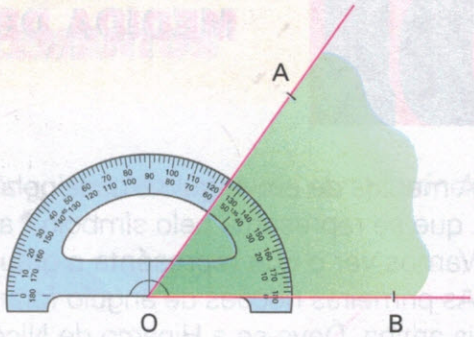
transferidor de 180°



transferidor de 360°

Vejamos como utilizar o transferidor para medir um ângulo.

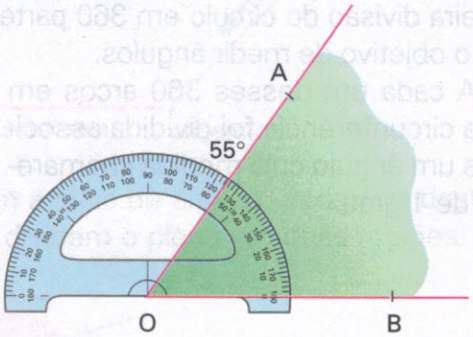
◆ Colocamos o transferidor de modo que seu centro coincida com o vértice do ângulo.



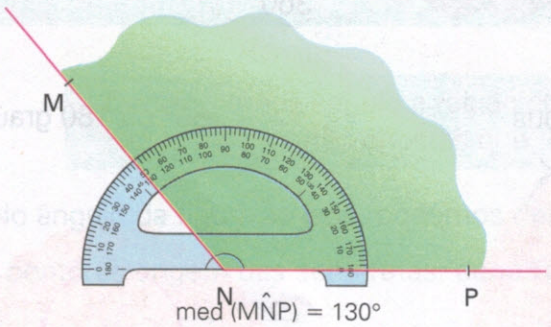
◆◆ Colocamos a escala correspondente ao zero no transferidor sobre um dos lados do ângulo.

◆◆◆ Identificamos na escala do transferidor o número interceptado pelo outro lado do ângulo.

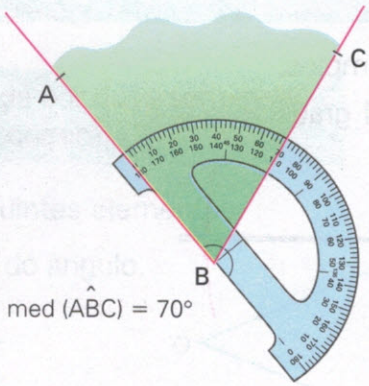
No exemplo ao lado, a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é 55°, e indicamos: med $(A\hat{O}B) = 55°$.



Vejamos mais dois exemplos:



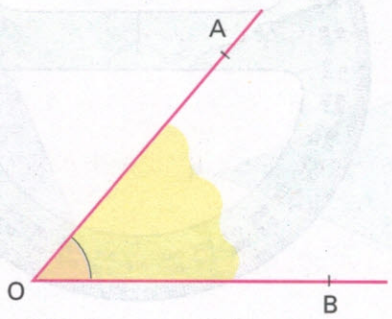
med $(M\hat{N}P) = 130°$

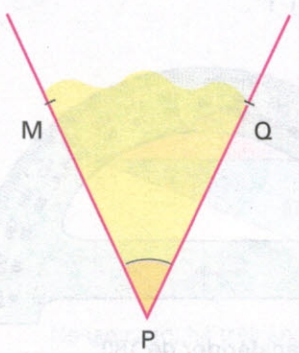


med $(A\hat{B}C) = 70°$

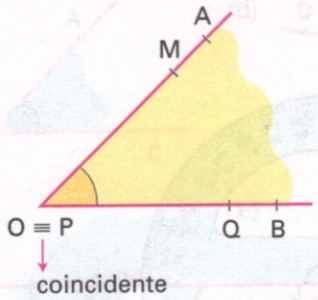
Ângulos congruentes

Consideremos os ângulos $A\hat{O}B$ e $M\hat{P}Q$ abaixo:





Se transportarmos um ângulo sobre o outro, podemos notar que os vértices e os lados dos dois ângulos coincidem:



Assim, $A\hat{O}B$ e $M\hat{P}Q$ possuem a mesma abertura e, portanto, a mesma medida.

Dois ângulos que têm a mesma medida são chamados ângulos *congruentes*, e utilizamos o símbolo ≅ para relacioná-los.

$\text{med}(A\hat{O}B) = \text{med}(M\hat{P}Q)$

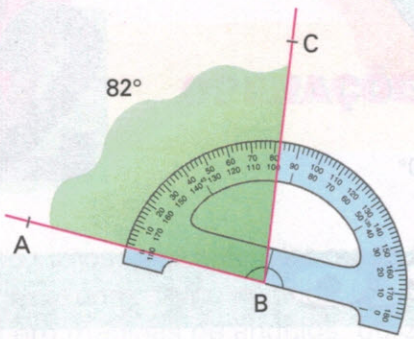
usamos o símbolo = quando comparamos medidas

congruente

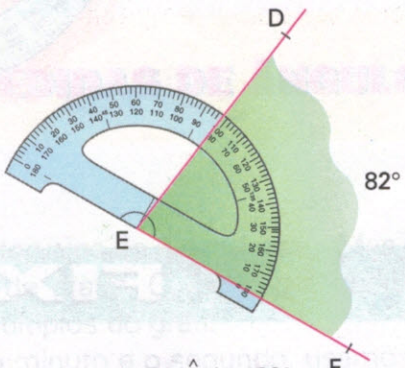
$A\hat{O}B \cong M\hat{P}Q$

usamos o símbolo ≅ quando comparamos ângulos

Na prática, utilizamos o transferidor para determinar se dois ângulos são ou não congruentes.



$\text{med}(A\hat{B}C) = 82°$

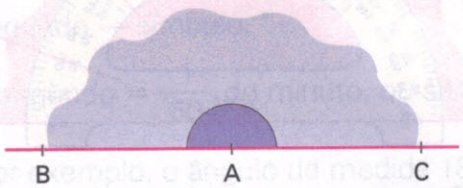


$\text{med}(D\hat{E}F) = 82°$

$A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$

Ângulo raso e ângulo nulo

Quando duas semi-retas são opostas, dizemos que formam um *ângulo raso* ou *de meia-volta*.



$B\hat{A}C$ é um ângulo raso ou de meia-volta

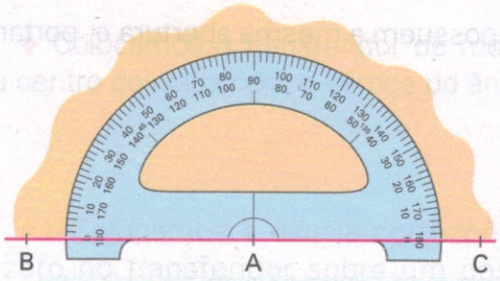
Quando duas semi-retas coincidem, obtemos dois ângulos: o *ângulo nulo* e o *ângulo de uma volta*.

ângulo nulo

ângulo de uma volta

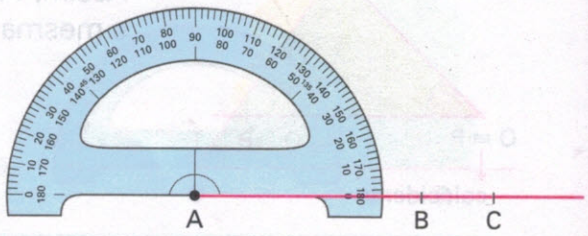
Usando um transferidor, podemos determinar as medidas, em graus, dos ângulos:

✓ de meia-volta



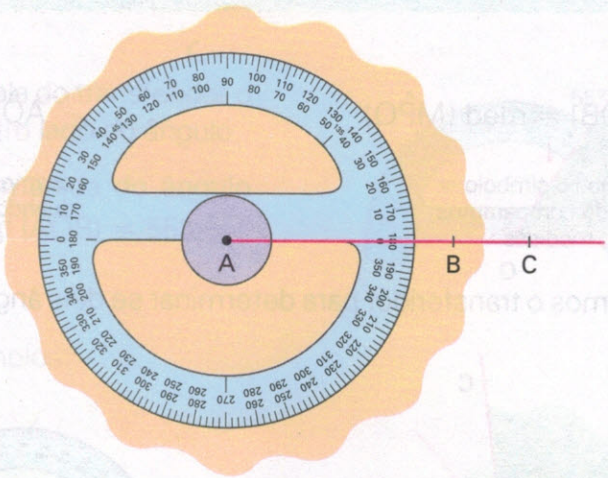
med (BÂC) = 180°

✓ nulo



med (BÂC) = 0°

✓ de uma volta

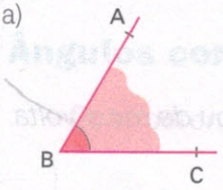


med (BÂC) = 360°

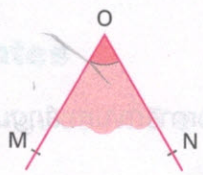
FIXAÇÃO

1 Identifique o vértice e os lados dos ângulos indicados abaixo:

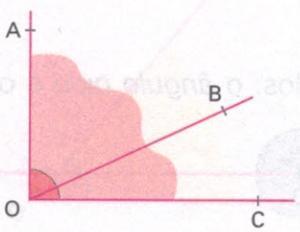
a)



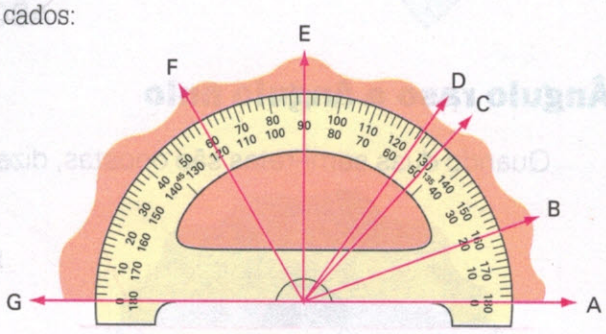
b)



2 Na figura abaixo, identifique todos os ângulos e nomeie-os:



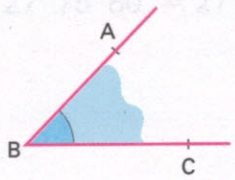
3 Na figura seguinte, dê as medidas dos ângulos indicados:



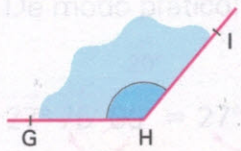
a) med (AÔB)
b) med (AÔC)
c) med (AÔD)
d) med (AÔE)
e) med (AÔF)
f) med (AÔG)
g) med (BÔE)
h) med (EÔF)

4 Usando um transferidor, dê a medida de cada ângulo abaixo:

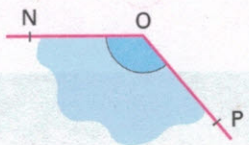
a)



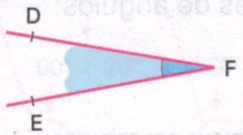
b)



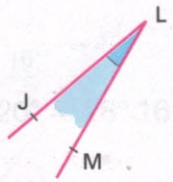
c)



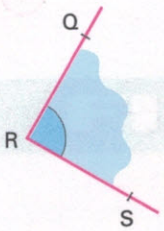
d)



e)



f)



5 No exercício anterior, identifique os pares de ângulos congruentes.

6 Construa, com a ajuda do transferidor, um ângulo de:

a) 42° b) 90° c) 125° d) 180°

7 Quanto mede, em graus, um ângulo de meia-volta?

8 Quanto mede, em graus, um ângulo de uma volta?

9 Dois ângulos, $A\hat{O}B$ e $M\hat{P}Q$, são congruentes. Sabendo-se que med $(A\hat{O}B) = 50°$ e med $(M\hat{P}Q) = 2x$, qual o valor de x e qual a medida de $M\hat{P}Q$?

10 Dois ângulos congruentes têm suas medidas expressas por $(2x - 10)°$ e $(x + 20)°$, respectivamente. Nessas condições, qual o valor de x e quais as medidas desses ângulos?

OPERAÇÕES COM MEDIDAS DE ÂNGULOS

Como vimos, o transferidor mede ângulos com intervalos de 1 em 1 grau. Mas há ângulos que não possuem como medida um número inteiro de graus. Como não é costume utilizar decimais em medidas de ângulos, utilizamos os submúltiplos do grau.

Para escrever a medida de um ângulo utilizando o minuto e o segundo, usamos a base 60 de numeração:

✓ minuto → símbolo: ′

1 minuto = $\frac{1}{60}$ do grau, ou seja, $1° = 60'$

$1° = 60'$
$1' = 60''$

✓ segundo → símbolo: ″

1 segundo = $\frac{1}{60}$ do minuto, ou seja $1' = 60''$

Por exemplo, o ângulo de medida 18,5° pode ser escrito assim:

$$18{,}5° = 18° + 0{,}5° = 18° + \left(\frac{5}{10}\right)° = 18° + \left(\frac{1}{2}\right)° = 18° + 30' \text{ ou } 18°\,30'$$

18 graus e 30 minutos

Transformação de unidades

Vejamos como fazer transformações de unidades de ângulos:

1. Expressar 1° em segundos.

Como $1° = 60'$ ⟶ transformando graus em minutos

$60' = (60 \cdot 60)'' = 3\,600''$ ⟶ transformando minutos em segundos

Então, $1° = 3\,600''$

2. Expressar 15° 12′ em minutos.

$15° = (15 \cdot 60)' = 900'$

$900' + 12' = 912'$

$15°\ 12' = 912'$

3. Expressar 90′ em graus e minutos.

90	60
30	1

$90' = 1 \cdot 60' + 30'$

$90' = 1° + 30'$

$90' = 1°\,30'$ (1 grau e 30 minutos)

4. Expressar 9 140″ em graus, minutos e segundos.

9140	60
314	152
140	
20	

$9\,140'' = 152 \cdot 60'' + 20'' = 152'\ 20''$

152	60
32	2

$152' = 2 \cdot 60' + 32' = 2°\,32'$

$9\,140'' = 2°\,32'\ 20''$
(2 graus, 32 minutos e 20 segundos)

Simplificando os resultados

Em algumas situações, principalmente nas operações com medidas de ângulos, precisamos simplificar os resultados obtidos. Vejamos como fazer isso, observando os exemplos:

1. Simplificar 54° 60′.

$54°\,60' = 54° + 60' = 54° + 1° = 55°$

(1° ← 60′)

2. Simplificar 18° 126′.

$18°\,126' = 18° + 126' = 18° + 2° + 6' = 20° + 6' = 20°\,6'$

(120′ + 6′ → 2°)

3. Simplificar 27° 75′ 80″.

$$27° 75′ 80″ = 27° + 75′ + 80″ = 27° + 76′ + 20″ = 28° + 16′ + 20″ = 28° 16′ 20″$$

60″ + 20″ → 1′ ; 60′ + 16′ → 1°

De modo prático:

$$27° \overset{1′}{\cancel{75′}}\ \overset{20″}{\cancel{80″}} = 27° \overset{1°}{\cancel{76′}}\ \overset{16′}{\cancel{20″}} = 28° 16′ 20″$$

FIXAÇÃO

1 Expresse em segundos:

a) 18′
b) 2′ 15″
c) 3°
d) 1° 8′ 51″

2 Expresse em minutos:

a) 40°
b) 12° 37′
c) 2 040″
d) 3 540″

3 Expresse em graus, minutos e segundos:

a) 5 710″
b) 53 400″
c) 43 471″
d) 28 827″

4 Qual a maior medida:

a) 20° ou 1 080′?
b) 12° ou 720′?
c) 15° 12′ ou 54 900″?

5 Escreva na forma mais simples possível as medidas:

a) 80″
b) 12′ 145″
c) 200′
d) 10° 60′
e) 1° 90′ 90″
f) 5° 100″
g) 8° 120′ 70″
h) 32° 59′ 91″

Adição

Para adicionar duas ou mais medidas de ângulos, devemos adicionar segundos com segundos, minutos com minutos e graus com graus, fazendo a simplificação, quando necessário.

Vejamos alguns exemplos de como adicionar medidas de ângulos:

$12° 17′ 30″ + 20° 5′ 15″$

$$\begin{array}{r} 12° 17′ 30″ \\ +\ 20°\ \ 5′ 15″ \\ \hline 32° 22′ 45″ \end{array}$$

$12° 17′ 30″ + 20° 5′ 15″ =$
$= 32° 22′ 45″$

$43° 50′ 30″ + 18° 20′ 51″$

$$\begin{array}{r} 43° 50′ 30″ \\ +\ 18° 20′ 51″ \\ \hline 61° 70′ 81″ \end{array} \longrightarrow \text{simplificando}$$

$61° 71′ 21″$ (1′ + 21″)

$62° 11′ 21″$ (1° + 11′)

$43° 50′ 30″ + 18° 20′ 51″ = 62° 11′ 21″$

Subtração

Para subtrair duas medidas de ângulos, devemos subtrair segundos de segundos, minutos de minutos e graus de graus. Em alguns casos, devemos fazer transformações para realizar as subtrações.

Vamos calcular:

$52° 17' 50'' - 41° 5' 18''$

$$\begin{array}{r} 52° \ 17' \ 50'' \\ -\ 41° \ \ 5' \ 18'' \\ \hline 11° \ 12' \ 32'' \end{array}$$

$52° 17' 50'' - 41° 5' 18'' =$
$= 11° 12' 32''$

$75° - 47° 25' 30''$

$$\begin{array}{r} 75° \ 00' \ 00'' \\ -\ 47° \ 25' \ 30'' \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 74° \ 60' \ 00'' \\ -\ 47° \ 25' \ 30'' \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 74° \ 59' \ 60'' \\ -\ 47° \ 25' \ 30'' \\ \hline 27° \ 34' \ 30'' \end{array}$$

$75° - 47° 25' 30'' = 27° 34' 30''$

Multiplicação por um número natural

Para multiplicar uma medida de ângulo por um número natural, devemos multiplicar esse número pelos segundos, minutos e graus, fazendo a simplificação, quando necessário.

Vamos calcular:

$(18° 13') \cdot 2$

$$\begin{array}{r} 18° \ 13' \\ \times \qquad 2 \\ \hline 36° \ 26' \end{array}$$

$(18° 13') \cdot 2 = 36° 26'$

$(4° 15' 28'') \cdot 5$

$$\begin{array}{r} 4° \ 15' \ 28'' \\ \times \qquad\quad 5 \\ \hline 20° \ 75' \ 140'' \end{array}$$

$2' + 20''$

$20° \ 77' \ 20''$

$1° + 17'$

$21° \ 17' \ 20''$

$(4° 15' 28'') \cdot 5 = 21° 17' 20''$

Divisão por um número natural

Vamos calcular:

$(56° 48' 16'') : 2$

$$\begin{array}{r|l} 56° \ 48' \ 16'' & 2 \\ 00 \ \ 00 \ \ 0 & 28° \ 24' \ 8'' \end{array}$$

$(56° 48' 16'') : 2 = 28° 24' 8''$

$(28° 17' 21'') : 3$

$$\begin{array}{r|l} 28° \ 17' \ 21'' & 3 \\ 1° + 60' + 120'' & 9° \ 25' \ 47'' \\ \hline 77' \qquad 141'' & \\ 2' \qquad\ \ 0 & \end{array}$$

$(28° 17' 21'') : 3 = 9° 25' 47''$

FIXAÇÃO

1 Efetue as operações indicadas:

a) $13° 12' + 41° 10' 20''$

b) $35° 20' - 10° 15' 30''$

c) $90° - 37° 40' 20''$

d) $34° 51' 12'' + 12° 10' 50''$

e) $(50° 19') \cdot 2$

f) $4 \cdot (10° 24' 45'')$

g) $(27° 36' 33'') : 3$

h) $(41° 50' 14'') : 2$

i) $180° - 54° 12' 49''$

j) $5 \cdot (2° 55' 30'')$

2 Determine, na forma mais simplificada possível, o valor das expressões:

a) $15° 12' 35'' + 27° 18' + 13° 51' 30''$

b) $(50° - 15° 20') : 5$

c) $(18° 15' + 30° 27' 40'') \cdot 2 - 81° 17' 30''$

3 Quanto mede a metade de $15° 19' 10''$?

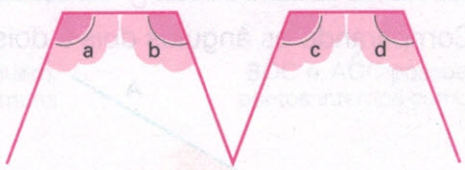
4 Qual a medida de um ângulo, sabendo-se que sua terça parte mede $9° 29' 5''$?

5 Se eu dividir um ângulo de 145° em quatro partes iguais, quanto irá medir cada parte?

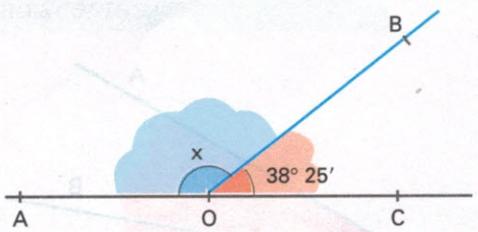
6 Quanto mede $\frac{2}{3}$ de $37° 40'$?

7 A soma das medidas de dois ângulos é 80°. Um deles mede $27° 18' 14''$. Qual a medida do outro ângulo?

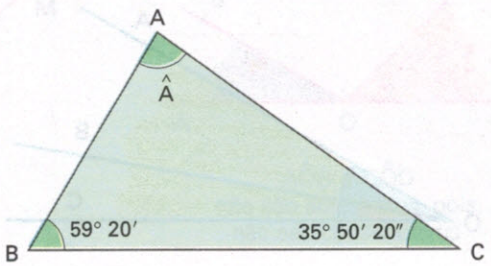
8 Na figura abaixo, as medidas *a*, *b*, *c* e *d* são iguais e podemos representá-las por *x*. Sabendo-se que $a + b + c + d = 442°$, quanto valem *a*, *b*, *c* e *d*?



9 Na figura abaixo, $A\hat{O}C$ é um ângulo de meia-volta. Qual o valor de *x*? (Lembre-se de que a medida do ângulo de meia-volta = 180°.)

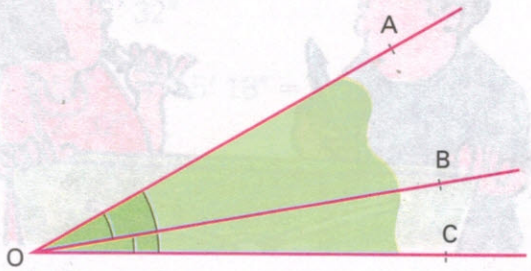


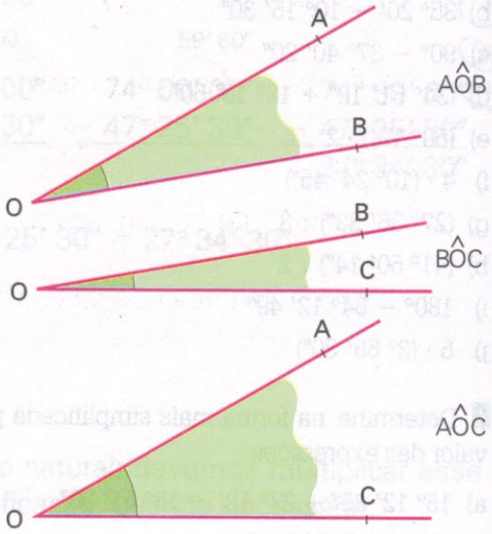
10 No triângulo abaixo, a soma das medidas dos três ângulos, $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, é igual a 180°. Qual a medida do ângulo $\hat{A}$?



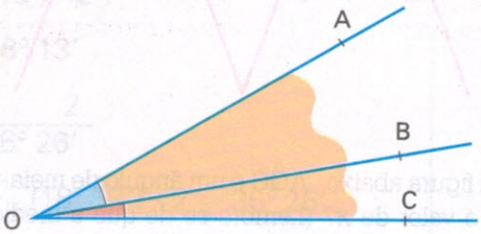
53 ÂNGULOS CONSECUTIVOS E ÂNGULOS ADJACENTES

Na figura abaixo, podemos destacar três ângulos:

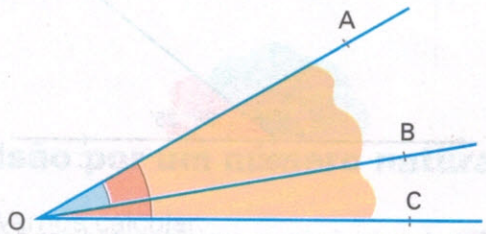




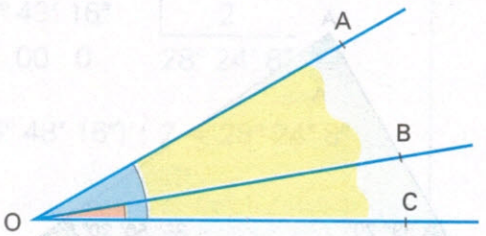
Comparando os ângulos dois a dois, temos:



- ✓ AÔB e BÔC têm o vértice comum (ponto *O*).
- ✓ AÔB e BÔC têm o lado $\overrightarrow{OB}$ comum.



- ✓ AÔB e AÔC têm o vértice comum (ponto *O*).
- ✓ AÔB e AÔC têm o lado $\overrightarrow{OA}$ comum.



- ✓ BÔC e AÔC têm o vértice comum (ponto *O*).
- ✓ BÔC e AÔC têm o lado $\overrightarrow{OC}$ comum.

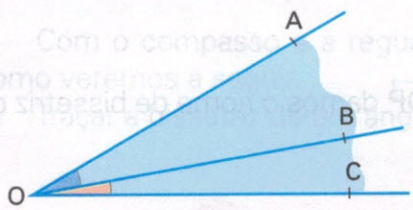
Dizemos que:

> Dois ângulos que possuem o mesmo vértice e têm um lado comum são denominados *ângulos consecutivos*.

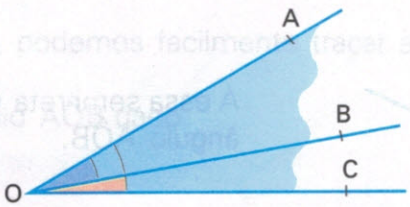
No exemplo visto:

- ✓ $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são ângulos consecutivos.
- ✓ $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ são ângulos consecutivos.
- ✓ $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C$ são ângulos consecutivos.

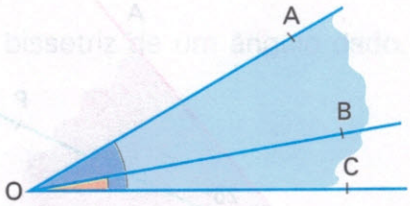
Nos três casos de ângulos consecutivos vistos anteriormente, podemos notar que:



$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ não possuem ponto interno comum



$A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ possuem pontos internos comuns



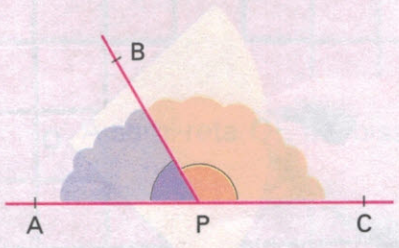
$B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C$ possuem pontos internos comuns

Dizemos que:

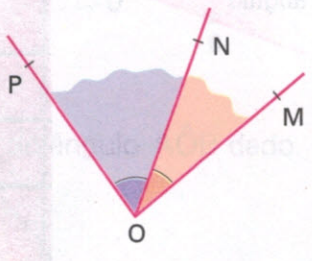
> Dois ângulos consecutivos que não possuem ponto interno comum são denominados *ângulos adjacentes*.

Então, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são ângulos adjacentes.

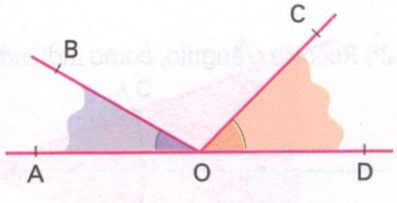
Veja outros exemplos:



$A\hat{P}B$ e $B\hat{P}C$ são adjacentes



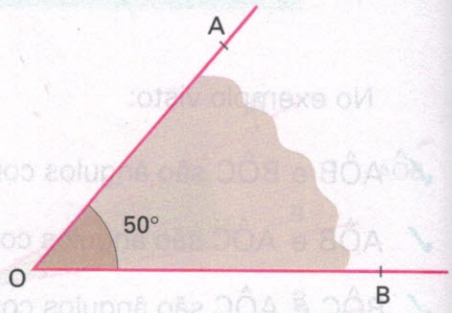
$P\hat{O}N$ e $N\hat{O}M$ são adjacentes



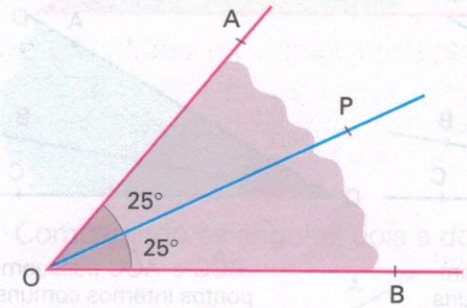
$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ não são adjacentes, pois não são consecutivos

54 BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

Seja o ângulo $A\hat{O}B$ da figura, sendo med ($A\hat{O}B$) = 50°.



A partir do vértice *O*, traçamos uma semi-reta $\overrightarrow{OP}$ que divide o ângulo $A\hat{O}B$ em dois ângulos adjacentes de mesma medida.



A essa semi-reta $\overrightarrow{OP}$ damos o nome de bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

Podemos, então, definir:

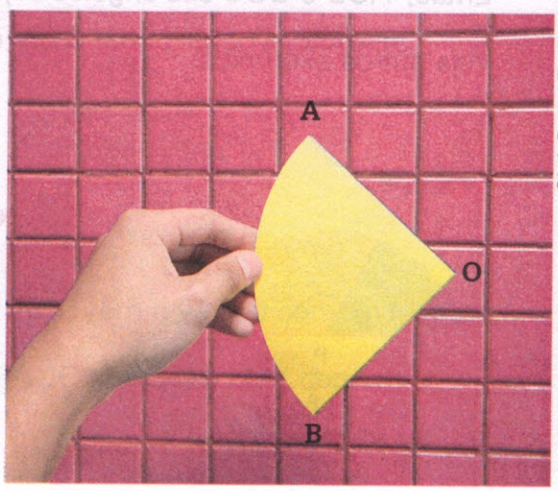
> *Bissetriz* de um ângulo é a semi-reta de origem no vértice que determina, com seus lados, dois ângulos adjacentes congruentes.

Explorando Geometria

Obtendo a bissetriz de um ângulo por dobraduras.

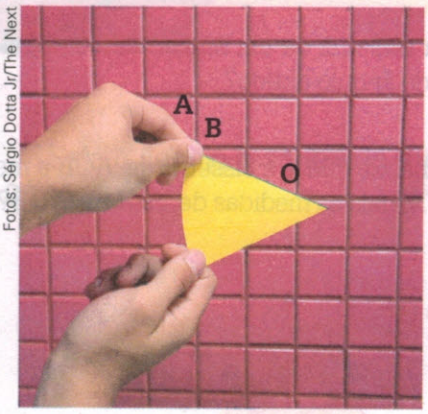
1º) Num pedaço de cartolina, desenhe um ângulo qualquer e nomeie-o de $A\hat{O}B$.

2º) Recorte o ângulo, como indicado:



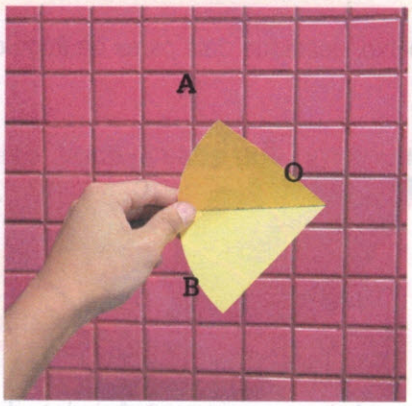
Sérgio Dotta Jr/The Next

3º) Dobre o ângulo, fazendo coincidir os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.



Fotos: Sérgio Dotta Jr/The Next

4º) Desdobre o ângulo. A dobra obtida é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

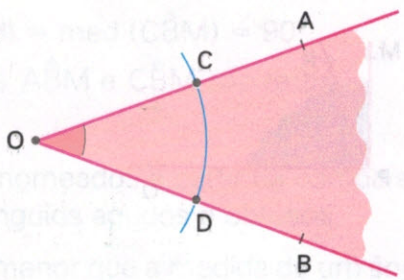


Construção da bissetriz

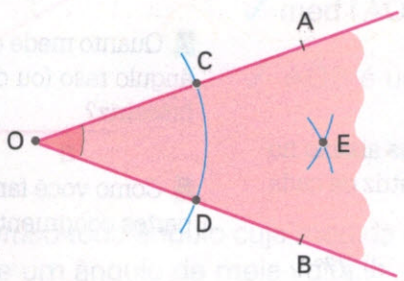
Com o compasso e a régua, podemos facilmente traçar a bissetriz de um ângulo dado, como veremos a seguir.

Traçar a bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ dado.

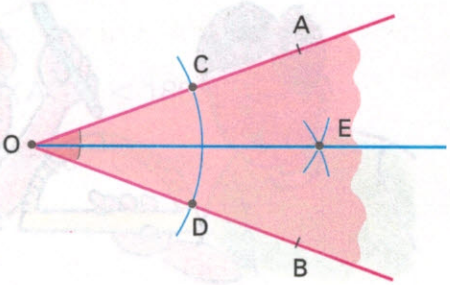
◆ Com centro no vértice *O*, traçamos um arco com abertura qualquer e determinamos os pontos *C* e *D*.



◆◆ Com centro nos pontos *C* e *D* traçamos dois arcos de mesma abertura, que se encontram no ponto *E*.

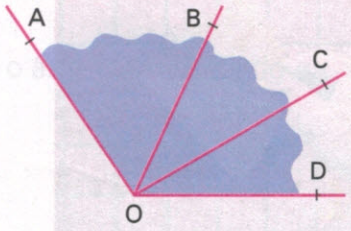


◆◆ A semi-reta $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ dado.



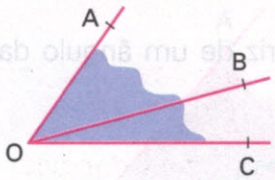
FIXAÇÃO

1 Na figura abaixo, destaque dois pares de ângulos consecutivos:

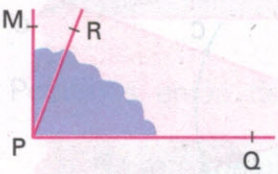


2 Em cada figura, destaque os pares de ângulos adjacentes:

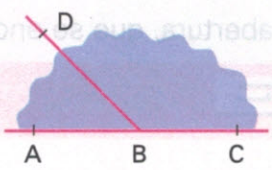
a)



b)

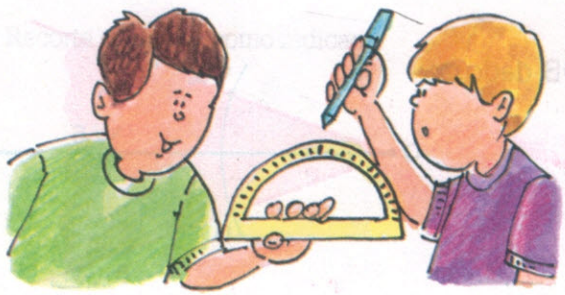


c)



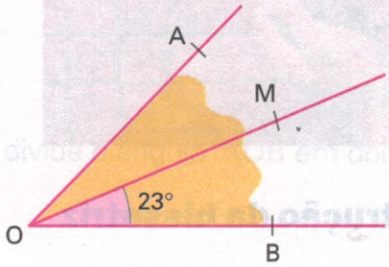
3 Com o transferidor, desenhe os ângulos abaixo no seu caderno, traçando em seguida a bissetriz de cada um, utilizando o compasso.

a) 60° b) 110° c) 90° d) 77°

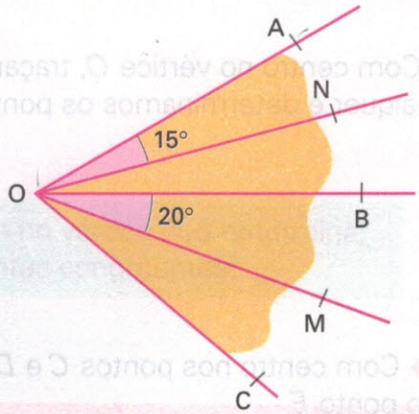


4 Traçando a bissetriz de um ângulo de 75°, qual a medida de cada ângulo obtido?

5 Na figura abaixo, $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz de $A\hat{O}B$ e med $(M\hat{O}B) = 23°$. Quais as medidas de $A\hat{O}M$ e $A\hat{O}B$?



6 Na figura abaixo, quanto mede o ângulo $A\hat{O}C$, sabendo-se que $\overrightarrow{ON}$ e $\overrightarrow{OM}$ são bissetrizes de $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ respectivamente?

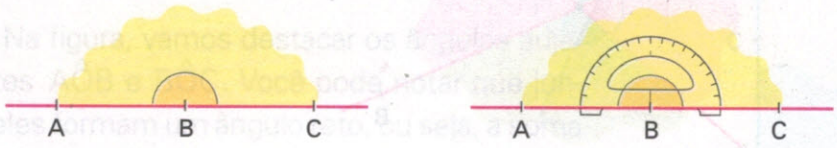


7 Quanto mede cada ângulo em que fica dividido um ângulo raso (ou de meia-volta) quando traçamos sua bissetriz?

8 Como você faria para dividir um ângulo em quatro partes congruentes (de mesma medida)?

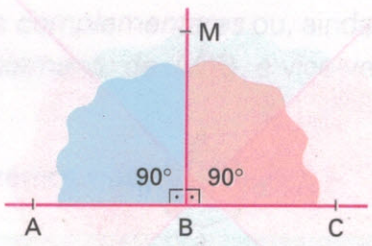
55 ÂNGULO RETO, ÂNGULO AGUDO E ÂNGULO OBTUSO

Seja o ângulo raso (ou de meia-volta) $A\hat{B}C$ abaixo. Você já sabe que um ângulo raso mede 180°.



med ($A\hat{B}C$) = 180°

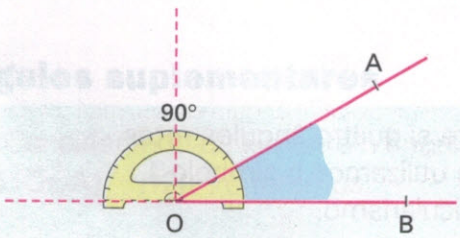
Traçando a bissetriz $\overrightarrow{BM}$ desse ângulo, vamos obter dois ângulos adjacentes congruentes e, portanto, medindo 90° cada um.



- ✓ Cada um desses ângulos de medida 90° é denominado *ângulo reto*.
- ✓ Utilizamos o símbolo ⊡ para destacar um ângulo reto.
- ✓ med ($A\hat{B}M$) = med ($C\hat{B}M$) = 90°
- ✓ Os ângulos $A\hat{B}M$ e $C\hat{B}M$ são retos.

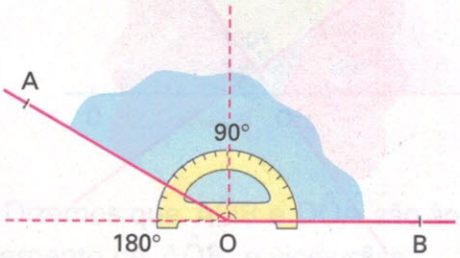
Podemos ainda destacar dois tipos de ângulos que são nomeados a partir da comparação de suas medidas com a medida de um ângulo reto: são os ângulos agudos e obtusos.

Denominamos *ângulo agudo* todo ângulo cuja medida é menor que a medida de um ângulo reto.



- ✓ med ($A\hat{O}B$) < 90°
- ✓ $A\hat{O}B$ é um ângulo agudo.

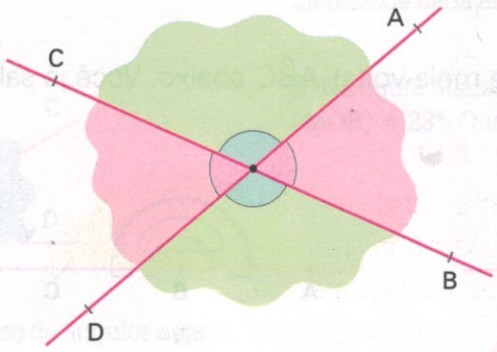
Denominamos *ângulo obtuso* todo ângulo cuja medida é maior que a medida de um ângulo reto e menor que a medida de um ângulo de meia-volta.



- ✓ 90° < med ($A\hat{O}B$) < 180°
- ✓ $A\hat{O}B$ é um ângulo obtuso.

Retas perpendiculares

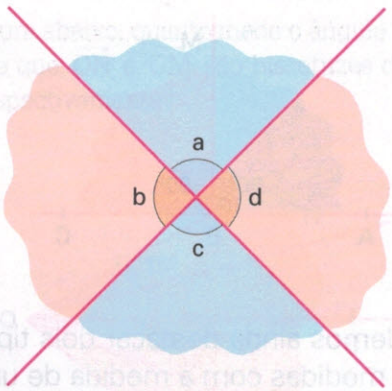
Se traçarmos duas retas num plano, tais que sejam concorrentes (possuam um ponto em comum), elas formam entre si quatro ângulos, como podemos ver pela figura ao lado.



Com a ajuda de um transferidor, podemos medir os quatro ângulos formados:

med ($A\hat{P}B$) = 64° med ($D\hat{P}C$) = 64°

med ($B\hat{P}D$) = 116° med ($C\hat{P}A$) = 116°



Mas, traçando duas retas concorrentes, é possível obter 4 ângulos congruentes, ou seja, de mesma medida.

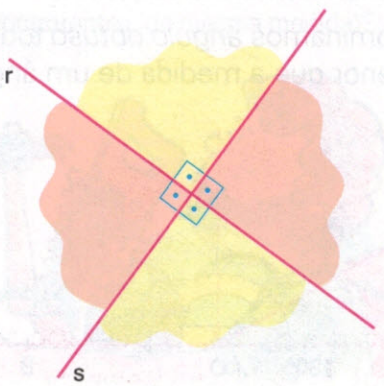
É fácil verificar que cada um desses ângulos mede 90°.

a = b = c = d = 90°

> Quando duas retas concorrentes formam entre si quatro ângulos retos, dizemos que as retas são *perpendiculares* e utilizamos o símbolo ⊥ para representar esse perpendicularismo.

Na figura, *r* e *s* formam entre si quatro ângulos retos; então r ⊥ s.

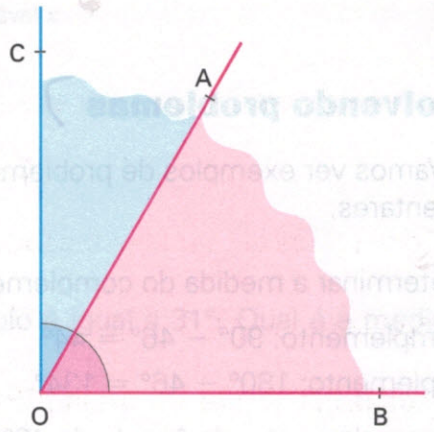
perpendicular a



56 ÂNGULOS COMPLEMENTARES E ÂNGULOS SUPLEMENTARES

Ângulos complementares

Na figura, vamos destacar os ângulos adjacentes $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$. Você pode notar que juntos eles formam um ângulo reto, ou seja, a soma de suas medidas é igual a 90°.



Dizemos que os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são ângulos *complementares* ou, ainda, que $B\hat{O}C$ é o *complementar* de $A\hat{O}B$, e vice-versa.

Dizemos que:

> Dois ângulos são *complementares* quando a soma de suas medidas é igual 90°.

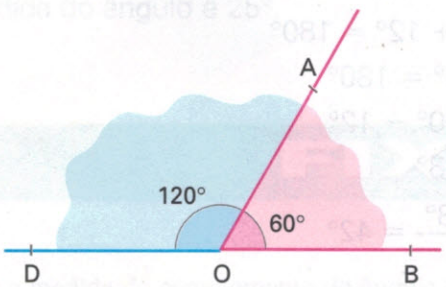
Assim:

Dois ângulos que medem 38° e 52° são complementares, pois 38° + 52° = 90°.

Dizemos que o ângulo de 38° é o complemento do ângulo de 52°, e vice-versa.

Ângulos suplementares

Considerando novamente o ângulo $A\hat{O}B$, podemos traçar o ângulo $D\hat{O}A$, tal que med ($D\hat{O}A$) = 120°, e teremos:



med ($A\hat{O}B$) + med ($D\hat{O}A$) = 60° + 120° = 180°

Dizemos que $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}A$ são ângulos *adjacentes suplementares* ou, ainda, que $D\hat{O}A$ é o suplemento de $A\hat{O}B$, e vice-versa.

Dizemos que:

Dois ângulos são *suplementares* quando a soma de suas medidas é igual a 180°.

Assim:

Dois ângulos que medem 45° e 135° são suplementares, pois 45° + 135° = 180°.

Dizemos que o ângulo de 45° é o suplemento do ângulo de 135°, e vice-versa.

Resolvendo problemas

Vamos ver exemplos de problemas resolvidos, envolvendo ângulos complementares e suplementares.

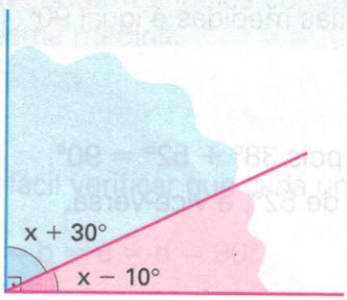
1. Determinar a medida do complemento e do suplemento do ângulo de 46°.

complemento: $90° - 46° = 44°$

suplemento: $180° - 46° = 134°$

O complemento do ângulo de 46° mede 44° e o suplemento 134°.

2. Na figura abaixo, determinar o valor de x.



Como os ângulos são adjacentes complementares:

$x + 30° + x - 10° = 90°$

$2x + 20° = 90°$

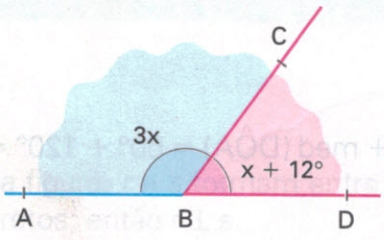
$2x = 90° - 20°$

$2x = 70°$

$x = \frac{70}{2} = 35°$

$x = 35°$

3. Na figura abaixo, determinar as medidas de $A\hat{B}C$ e $C\hat{B}D$.



Como os ângulos são adjacentes suplementares:

$3x + x + 12° = 180°$

$4x + 12° = 180°$

$4x = 180° - 12°$

$4x = 168°$

$x = \frac{168°}{4} = 42°$

$\text{med}(A\hat{B}C) = 3x = 3 \cdot (42) = 126°$

$\text{med}(C\hat{B}D) = x + 12° = 42° + 12° = 54°$

$A\hat{B}C$ e $C\hat{B}D$ medem 126° e 54°, respectivamente.

4. O dobro da medida de um ângulo, aumentado da medida do complemento do mesmo ângulo, é igual a 120°. Calcular a medida do ângulo.

Se chamarmos a medida do ângulo de x, a medida do seu complemento será $90° - x$.

Pelo problema: $2x + (90° - x) = 120°$

dobro da medida do ângulo

complemento da medida do ângulo

$2x + (90° - x) = 120°$ ⟶ equação de 1º grau na variável x

$2x + 90° - x = 120°$

$x = 120° - 90°$

$x = 30°$

O ângulo mede 30°.

5. A quinta parte da medida do suplemento de um ângulo é igual a 31°. Qual é a medida do ângulo?

medida do ângulo: x

medida do suplemento do ângulo: $180° - x$

Pelo problema: $\frac{180° - x}{5} = 31°$

a quinta parte da medida do suplemento

$\frac{180 - x}{5} = 31$

$\frac{180 - x}{5} = \frac{155}{5}$

$180 - x = 155$

$-x = 155 - 180$

$-x = -25$

$x = 25°$

A medida do ângulo é 25°.

FIXAÇÃO

1 Calcule a medida do complemento do ângulo que mede:

a) 8°
b) 27°
c) 35° 18′
d) 45°
e) 89°
f) 51° 36′ 40″

2 Calcule a medida do suplemento do ângulo que mede:

a) 42°
b) 150°
c) 90°
d) 18° 43′
e) 175°
f) 121° 42′ 37″

3 Se um ângulo mede x graus, qual a expressão que você utilizaria para representar:

a) o complemento desse ângulo?

b) o suplemento desse ângulo?

c) a metade do suplemento desse ângulo?

d) o quíntuplo do suplemento desse ângulo?

e) $\frac{3}{5}$ do complemento desse ângulo?

f) a soma do ângulo com a metade do seu suplemento?

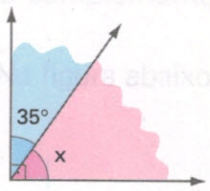
4 Quanto mede a metade do complemento de 57°?

5 Quanto mede o ângulo cuja medida é igual à medida do seu complemento?

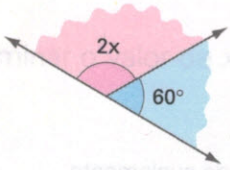
6 Quanto mede o triplo do suplemento de 158° 20′?

7 Nas figuras abaixo, determine a medida de x:

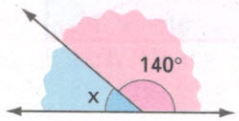
a)



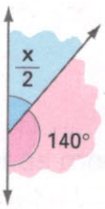
d)



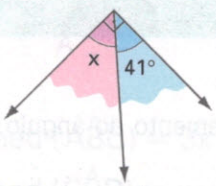
b)



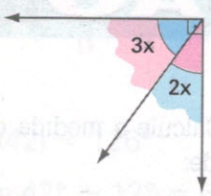
e)



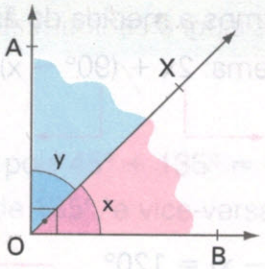
c)



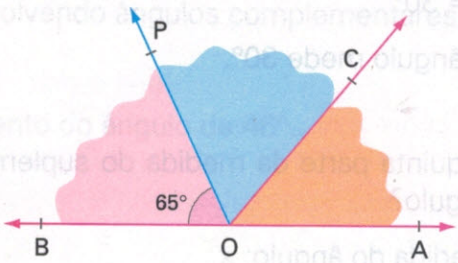
f)



8 Na figura, $\overrightarrow{OX}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$. Determine as medidas de x e y.



9 Na figura abaixo, $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz de $B\hat{O}C$. Calcule a medida de $A\hat{O}C$.

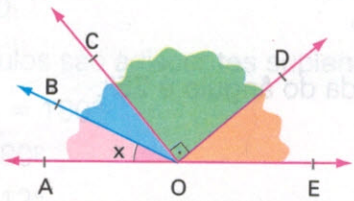


10 O triplo da medida do complemento de um ângulo é igual a 111°. Qual a medida desse ângulo?

11 Dois ângulos são suplementares. Um deles mede 93° 50′. Qual a medida do outro?

12 Quanto mede um ângulo que é igual ao triplo da medida do seu suplemento?

13 Na figura abaixo, $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz de $A\hat{O}C$ e med $(D\hat{O}E) = 40°$. Determine a medida de x.

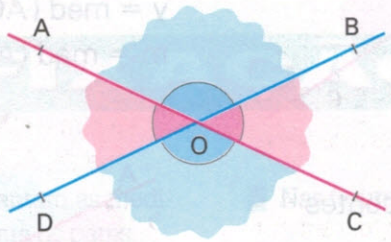


14 Os $\frac{2}{3}$ da medida do complemento de um ângulo corresponde a 10°. Quanto mede esse ângulo?

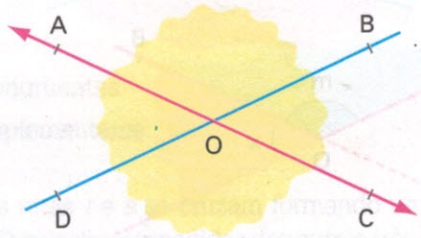
15 A diferença entre as medidas de dois ângulos complementares é de 50°. Quais as medidas desses ângulos?

57 ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

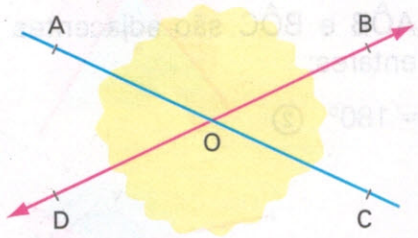
Observe a figura, em que estão destacados os ângulos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$.



Nessa figura, temos:



$\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são semi-retas opostas.

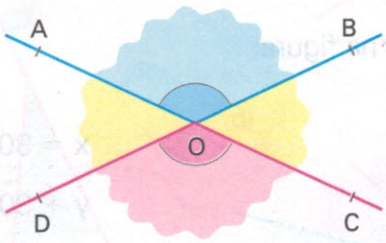


$\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são semi-retas opostas.

Portanto, as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ que formam os lados do ângulo $A\hat{O}B$ são opostas, respectivamente, às semi-retas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ que formam os lados do ângulo $C\hat{O}D$.

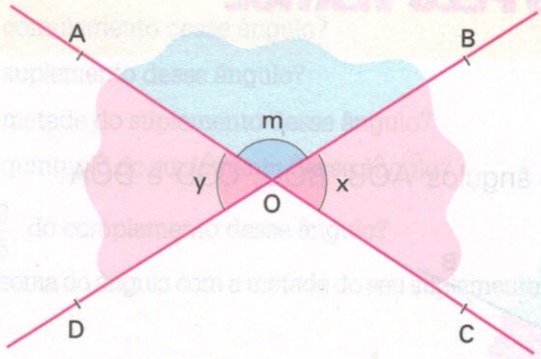
Neste caso, podemos afirmar também que os lados do ângulo $A\hat{O}B$ são formados pelos prolongamentos dos lados do ângulo $C\hat{O}D$, e vice-versa.

A esses dois ângulos damos o nome de *ângulos opostos pelo vértice*.



Dois ângulos são chamados *opostos pelo vértice* (abreviamos o.p.v.) quando os lados de um forem prolongamentos dos lados do outro, e vice-versa.

Uma propriedade importante dos ângulos o.p.v.



Na figura ao lado, os ângulos AÔD e BÔC são opostos pelo vértice.

Indicando por:

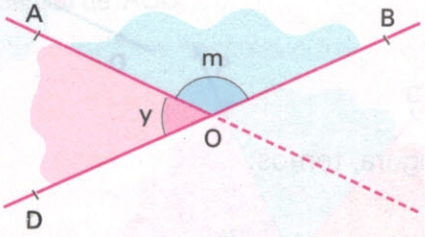
$x = \text{med}(B\hat{O}C)$

$y = \text{med}(A\hat{O}D)$

$m = \text{med}(A\hat{O}B)$

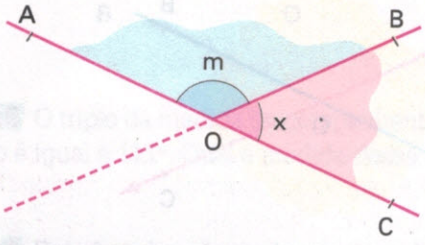
✓ Como AÔB e AÔD são adjacentes suplementares:

$m + y = 180°$ ①



✓ Como AÔB e BÔC são adjacentes suplementares:

$m + x = 180°$ ②



✓ Comparando ① e ②:

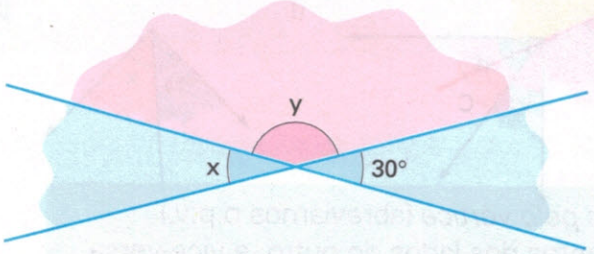
$$\left.\begin{array}{l} m + y = 180° \\ m + x = 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m + y = m + x \\ y = x \end{array}$$

Podemos enunciar a seguinte propriedade:

> Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ou seja, têm a mesma medida.

Vamos ver algumas aplicações dessa propriedade na resolução de problemas:

1. Determinar os valores de *x* e *y* na figura:



$x = 30°$ ⟶ ângulos o.p.v.

$y + 30° = 180°$ ⟶ ângulos adjacentes suplementares

$y = 180° - 30°$

$y = 150°$

2. Dois ângulos opostos pelo vértice têm medidas, em graus, expressas por $x + 50°$ e $2x - 30°$. Qual é o valor de x?

$x + 50° = 2x - 30°$ ⟶ ângulos o.p.v.

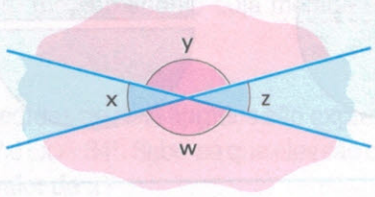
$x - 2x = -30° - 50°$

$-x = -80°$

$x = 80°$

FIXAÇÃO

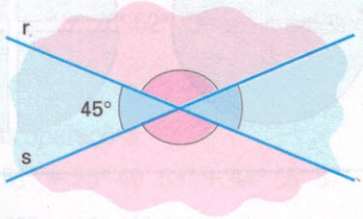
1 Na figura abaixo, x, y, z e w representam as medidas dos ângulos assinalados. Identifique os pares:



a) congruentes

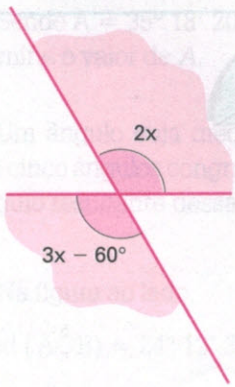
b) suplementares

2 As retas r e s se cruzam formando um ângulo de 45°. Determine as medidas dos outros três ângulos formados por essas retas.

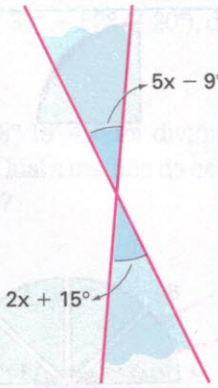


3 Nas figuras abaixo, determine o valor de x:

a)



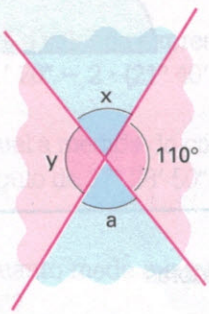
b)



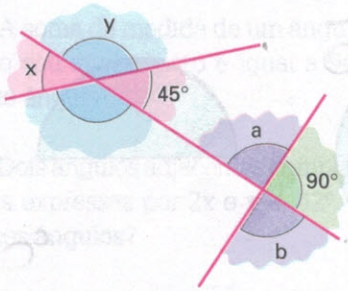
4 As medidas de dois ângulos opostos pelo vértice são expressas, em graus, por $3x + 40°$ e $6x - 21°$. Qual a medida de x?

5 Nas figuras, calcule as medidas de x e y, a e b:

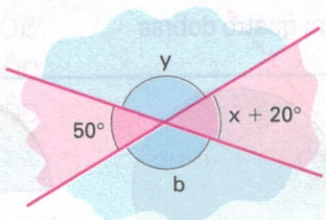
a)



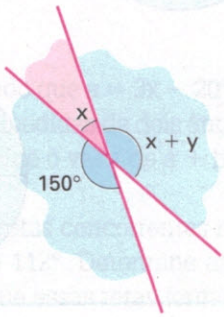
b)



c)



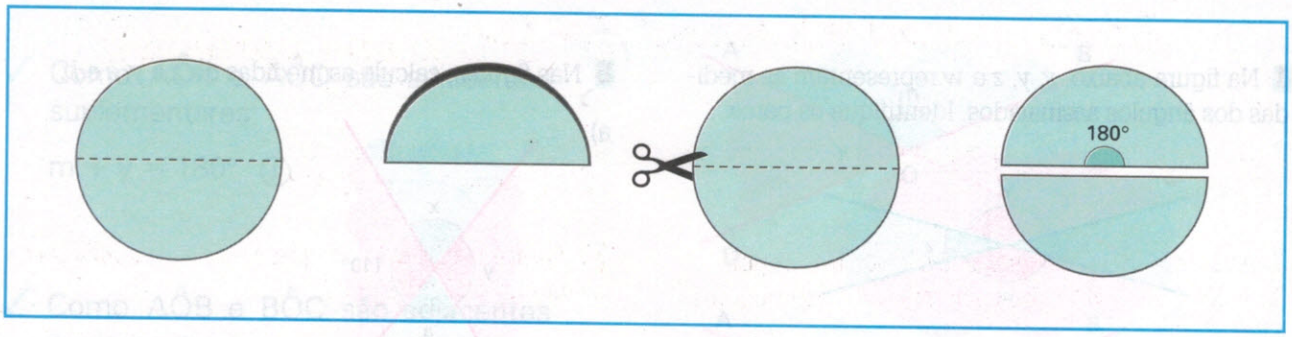
d)



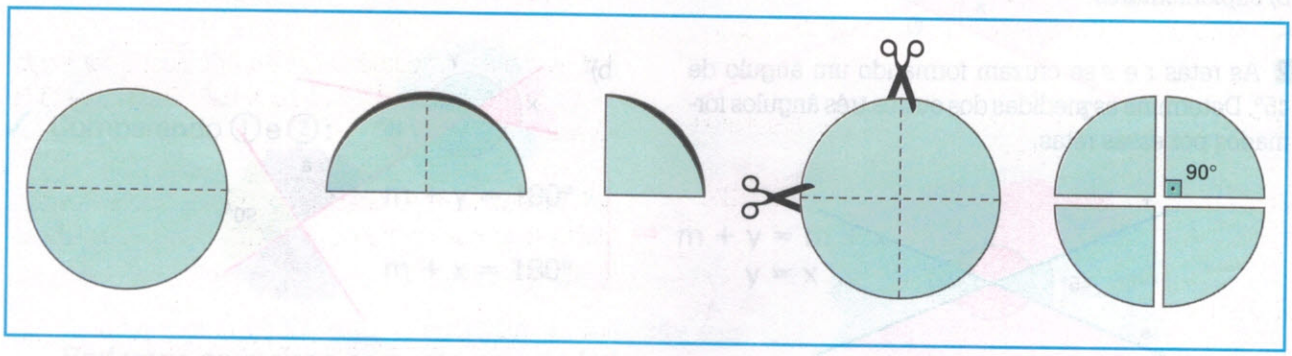
Usando um compasso construa círculos em uma cartolina e trace os seus diâmetros. Em seguida, recorte os círculos, que serão empregados nas atividades a seguir:

Com o auxílio de dobraduras é possível dividir um círculo em:

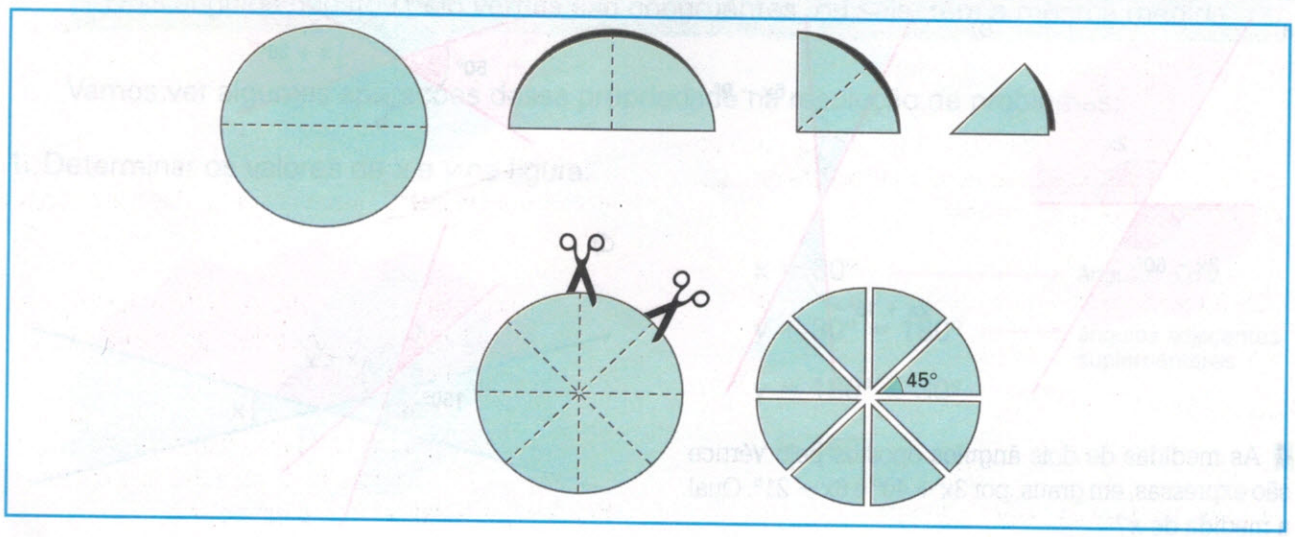
- 2 partes iguais, com apenas uma dobra



- 4 partes iguais, com duas dobras



- 8 partes iguais, com quatro dobras



1. Quantas dobras, no mínimo, serão necessárias para dividir o círculo em 16 partes iguais?

2. Ao dividir o círculo em duas partes, cada uma das partes representa um ângulo de 180°. Construa uma tabela, como a que sugerimos abaixo, para a divisão do círculo em 4, 8 e 16 partes.

Número de partes em que o círculo foi dividido	Medida do ângulo que cada uma das partes representa
2	180°

RETOMANDO o que aprendeu

1 Quanto mede o ângulo cuja medida é o dobro de 22° 30′?

2 As medidas de dois ângulos são expressas por $3x + 20°$ e $5x - 34°$. Sabe-se que eles são congruentes. Qual o valor de x?

3 Qual a forma mais simples de escrever as medidas:

a) 75° 42′ 81″? b) 57° 137′ 128″? c) 27° 58′ 120″?

4 Dois ângulos, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, são adjacentes e suas medidas são: med $(A\hat{O}B) = 25° 47′ 28″$ e med $(B\hat{O}C) = 13° 26′ 52″$. Qual a medida de $A\hat{O}C$?

5 Efetue as operações:

a) $27° 45′ 51″ + 85° 49′ 53″ + 44° 56′ 57″$

b) $58° 29′ 48″ - 10° 40′ 56″$

6 Sendo $A = 35° 18′ 20″ - (80° 30′ - 52° 4′ 20″)$, determine o valor de A.

7 Um ângulo cuja medida é 58° 19′ 45″ foi dividido em cinco ângulos congruentes. Qual a medida de cada ângulo resultante dessa divisão?

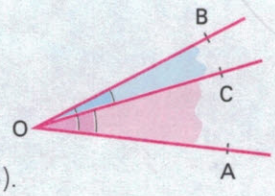
8 Na figura ao lado,

med $(A\hat{O}B) = 24° 12′ 36″$.

Sabe-se que

$\text{med}(A\hat{O}C) = \frac{3}{4}\,\text{med}(A\hat{O}B)$.

Quais as medidas de $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$?



9 Qual o valor da expressão $52° 51′ 20″ - 2 \cdot (21° 40′ 32″ - 5° 50′ 12″)$?

10 Qual a medida do complemento e do suplemento do ângulo de 37° 28′ 50″?

11 Quanto mede o suplemento do complemento de 65° 30′?

12 A soma da medida de um ângulo com a terça parte do seu suplemento é igual a 94°. Qual a medida desse ângulo?

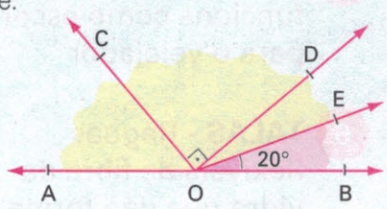
13 Dois ângulos adjacentes complementares têm medidas expressas por $2x$ e $x + 42°$. Quais as medidas desses ângulos?

14 Na figura abaixo, $\overrightarrow{OE}$ é bissetriz de $D\hat{O}B$. Determine as medidas de:

a) $D\hat{O}E$

b) $A\hat{O}C$

c) $A\hat{O}D$



15 Dois ângulos adjacentes suplementares estão na razão 3 para 5. Determine as medidas desses dois ângulos.

16 Sabendo que $a = 3x - 20°$ e $b = 2x + 10°$ e que a e b são as medidas de dois ângulos opostos pelo vértice, determine o valor de $a + b$.

17 Duas retas concorrentes r e s formam entre si um ângulo de 112°. Determine as medidas dos outros 3 ângulos que essas retas formam entre si.

JORNAIS & REVISTAS

"De Miami a Ilhabela em um veleiro" é o título de uma reportagem da revista *Globo Ciência*, de maio de 1995. Trata-se de uma aventura fantástica vivida pela dupla de navegadores brasileiros Roberto Pandiani e Marcus Sulzbacher: velejar 13 mil quilômetros entre Miami, nos Estados Unidos, e Ilhabela, no litoral paulista, cruzando os rios da Amazônia, num barco a vela conhecido como catamarã. A viagem durou 300 dias.

1. **MASTRO** - Sustenta as velas
2. **FLUTUADOR** - Evita que o barco emborque em caso de naufrágio
3. **SPINAKER** - Usado para vento de popa
4. **VELA MESTRA e BUJA** - Usadas para todos os tipos de ventos
5. **ASA** - Assento que funciona como escora para o velejador
6. **TALAS** - Réguas flexíveis de fibra de vidro que dão forma à vela
7. **ESTAI FRONTAL**
8. **ESTAI LATERAL**
9. **BRANDAL** - Hastes que sustentam o mastro
10. **RETRANCA** - Haste de alumínio onde são fixados os cabos que controlam as velas e funcionam como aceleradores
11. **BOLINA ou QUILHA** - Peça que dá estabilidade ao barco
12. **CASCO** - É dividido em três partes, uma revestida com isopor e duas ocas para carga e estoque. Se uma delas furar, o barco continua flutuando com as demais
13. **LEMES** - Direcionam o movimento do barco

Com base nesses dados, responda:

1. Quantos quilômetros por dia, em média, os navegadores percorreram?
2. Qual é a relação entre o comprimento e a largura do catamará?
3. Quantas vezes o mastro é mais alto que uma pessoa de 1,67 m?

FICHA TÉCNICA

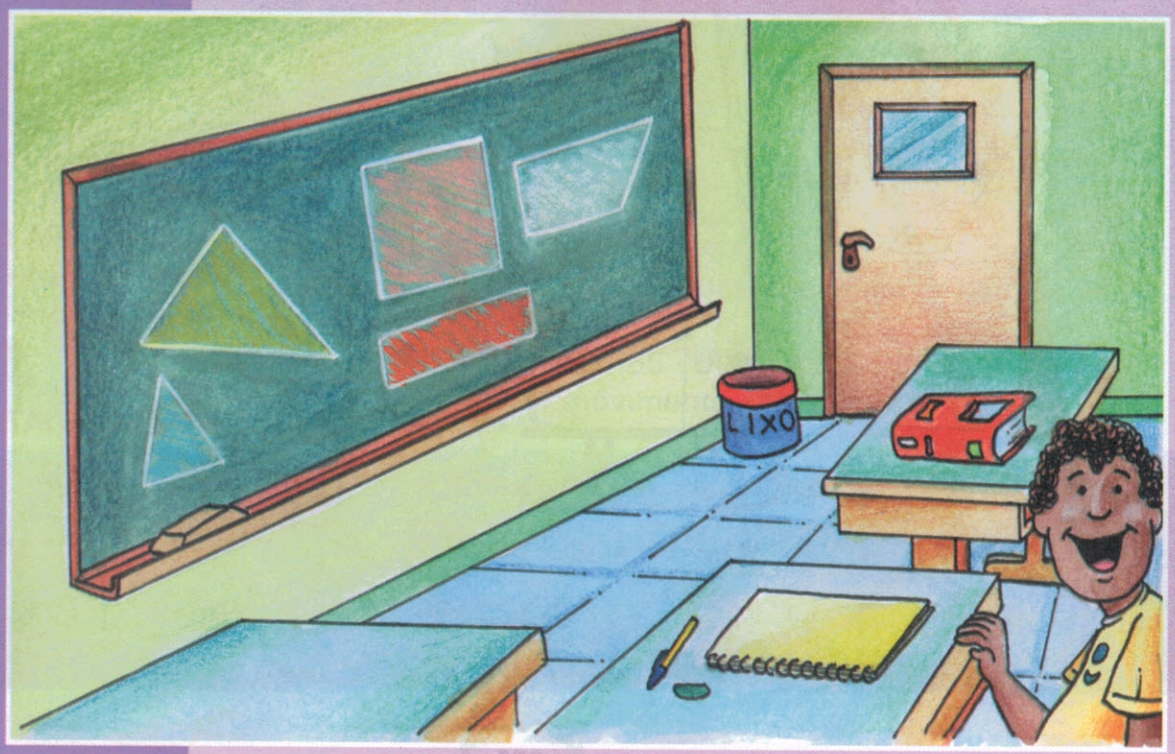
Nome: Hobie Cata 21 Cruzer
Comprimento: 6,5 cm
Largura: 4,2 cm
Mastro: 10,06 m
Capacidade: 4 tripulantes
Área vélica: 27,87 m^2

10

Estudando triângulos e quadriláteros

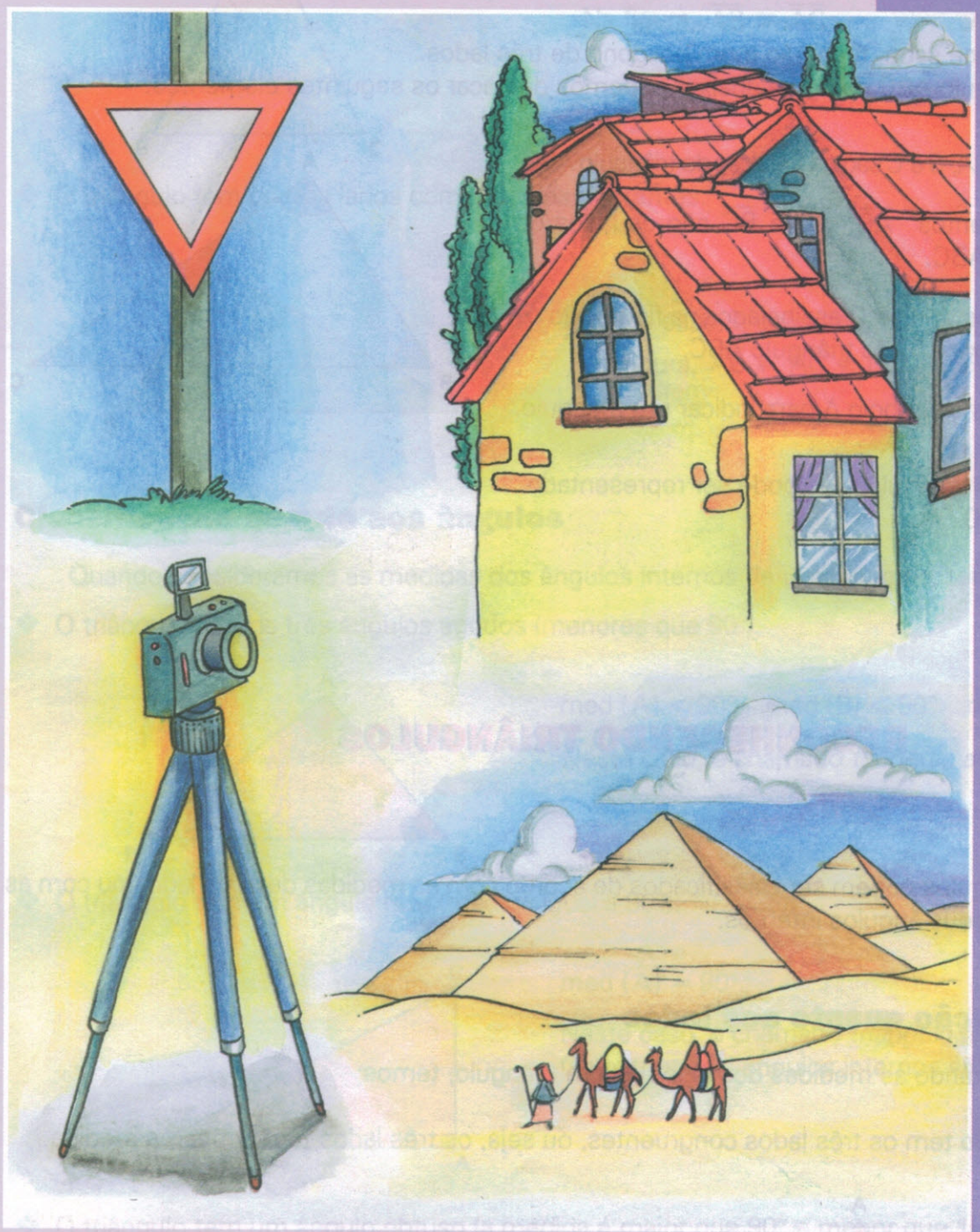
Sem dúvida nenhuma, de todos os polígonos, aqueles que aparecem com maior freqüência são os *triângulos* e os *quadriláteros*.

Basta você prestar atenção à sua sala de aula: a lousa, a carteira, a capa do livro e a do caderno têm a forma de quadrilátero.



E provavelmente a porta, a janela, a parede e o piso também.

Se você prestar atenção, vai perceber ainda que muitas placas, estruturas de telhados, estruturas de arquibancadas metálicas, esquadros, as faces das pirâmides etc. têm forma triangular.

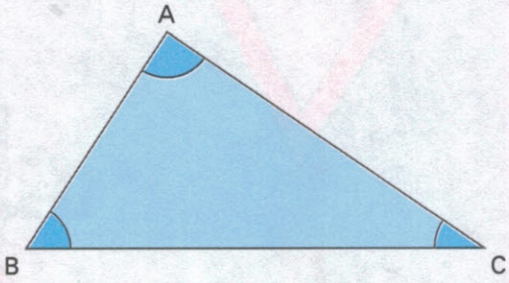


Não é por acaso que essas formas, triângulos e quadriláteros, são vastamente utilizadas. Isso se deve às suas estruturas, simples de obter, e principalmente devido às importantes propriedades dessas formas.

Nesta Unidade você tomará conhecimento de algumas dessas importantes propriedades.

58 O TRIÂNGULO E SEUS ELEMENTOS

Como você sabe, triângulo é um polígono de três lados.
No triângulo ABC da figura abaixo, podemos destacar os seguintes elementos:



- ✓ Os pontos *A*, *B* e *C* são os *vértices* do triângulo ABC.
- ✓ Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os lados do triângulo ABC.
- ✓ Os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ assinalados na figura são os *ângulos internos* do triângulo ABC.
- ✓ Utilizamos o símbolo Δ para indicar um triângulo.

Assim, o triângulo ABC pode ser representado por ΔABC.

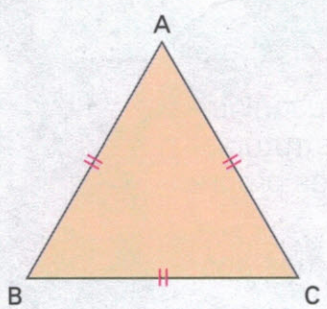
59 RECONHECENDO TRIÂNGULOS

Os triângulos podem ser classificados de acordo com as medidas de seus lados ou com as medidas de seus ângulos internos.

Classificação quanto aos lados

Considerando as medidas dos lados de um triângulo, temos:

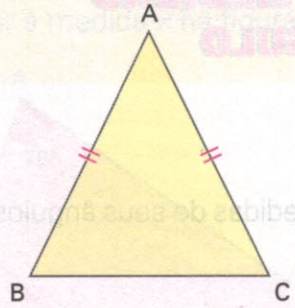
- ❖ O triângulo tem os três lados congruentes, ou seja, os três lados têm a mesma medida.



Neste caso, é chamado *triângulo eqüilátero*.

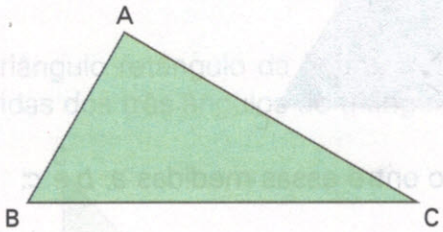
Na figura, $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$.

❖ O triângulo tem apenas dois lados congruentes, ou seja, dois lados têm a mesma medida.



Neste caso, é chamado *triângulo isósceles*.
Na figura, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

❖ O triângulo tem os três lados com medidas diferentes.

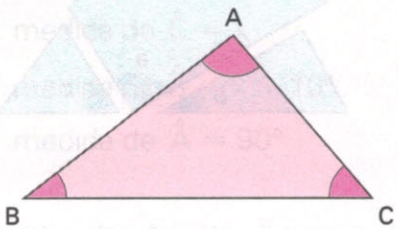


Neste caso, é chamado *triângulo escaleno*.
Na figura, $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB}$.

Classificação quanto aos ângulos

Quando consideramos as medidas dos ângulos internos de um triângulo, temos:

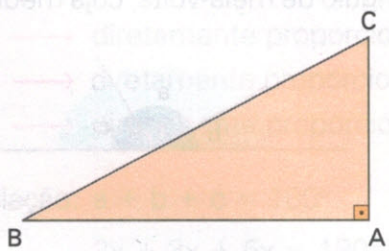
❖ O triângulo tem os três ângulos agudos (menores que 90°).



$\text{med}(\hat{A}) < 90°$ $\text{med}(\hat{B}) < 90°$ $\text{med}(\hat{C}) < 90°$

Neste caso, é chamado *triângulo acutângulo*.

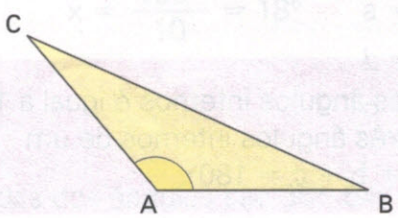
❖ O triângulo tem um ângulo reto (medida igual a 90°).



$\text{med}(\hat{A}) = 90°$

Neste caso, é chamado *triângulo retângulo*.
Os outros dois ângulos internos são agudos.

❖ O triângulo tem um ângulo obtuso (a medida é maior que 90° e menor que 180°).

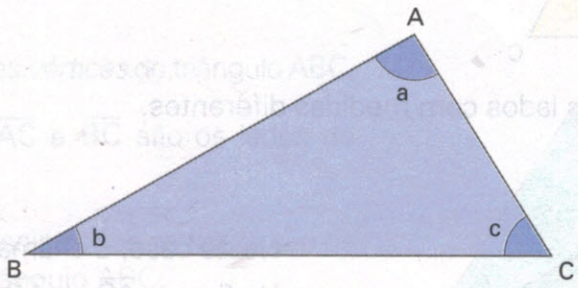


$90° < \text{med}(\hat{A}) < 180°$

Neste caso, é chamado *triângulo obtusângulo*.
Os outros dois ângulos internos são agudos.

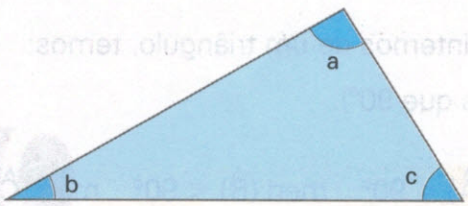
60 UMA RELAÇÃO ENTRE AS MEDIDAS DOS ÂNGULOS DO TRIÂNGULO

Consideremos o triângulo ABC, abaixo, e sejam *a*, *b* e *c* as medidas de seus ângulos internos.

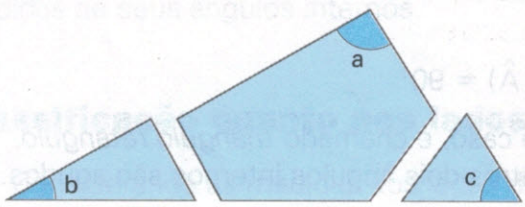


Vamos determinar experimentalmente uma relação entre essas medidas *a*, *b* e *c*:

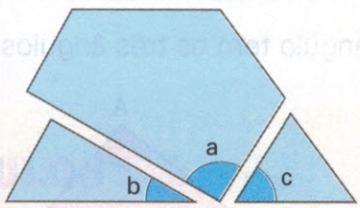
1) Desenhe numa folha um triângulo de qualquer tamanho.



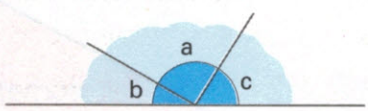
2) Separe o triângulo em três partes, cada uma contendo um dos ângulos do triângulo.



3) Junte os três ângulos do triângulo, fazendo coincidir seus vértices, como na figura.



4) Você pode notar que se formou um ângulo de meia-volta, cuja medida é 180°.



Assim, a + b + c = 180°.

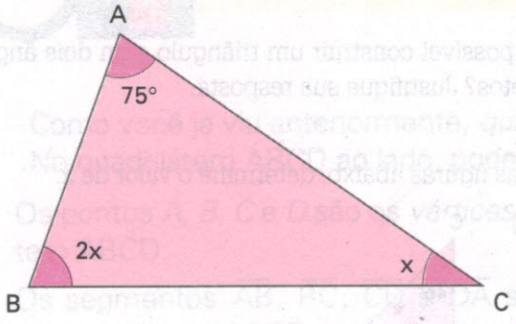
Se você repetir a experiência com outros triângulos, verá que a soma das medidas dos seus ângulos internos será sempre 180°.

Podemos então estabelecer a seguinte relação:

> Em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180°.
> Se *a*, *b* e *c* expressam as medidas dos três ângulos internos de um triângulo qualquer, temos: a + b + c = 180°.

Vamos ver alguns exemplos de problemas onde podemos aplicar essa relação:

1. Calcular a medida x na figura abaixo:



Como 75°, x e $2x$ são as medidas dos ângulos internos do ΔABC, temos:

$75° + x + 2x = 180°$

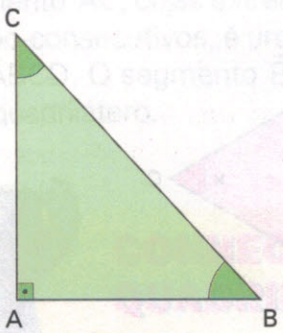
$3x = 180° - 75°$

$3x = 105°$

$x = \frac{105°}{3}$

$x = 35°$

2. No triângulo retângulo da figura, a medida de $\hat{B}$ supera a medida de $\hat{C}$ em 10°. Quais as medidas dos três ângulos do triângulo?



medida de $\hat{C} = x$

medida de $\hat{B} = x + 10°$

medida de $\hat{A} = 90°$

Pela relação:

$x + x + 10° + 90° = 180°$

$2x + 100° = 180°$

$2x = 180° - 100°$

$2x = 80°$

$x = \frac{80°}{2} = 40°$

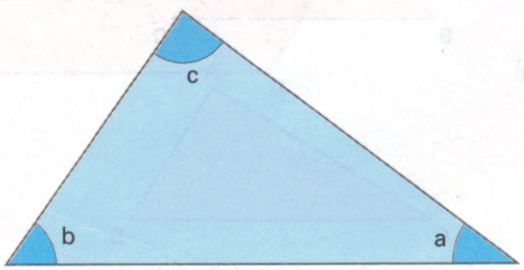
$\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 50°$ e $\hat{C} = 40°$

3. As medidas dos ângulos internos de um triângulo são diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 5. Quais são as medidas desses três ângulos?
Se chamarmos as medidas de a, b e c, podemos escrever:

$a = 2x \longrightarrow$ diretamente proporcional a 2

$b = 3x \longrightarrow$ diretamente proporcional a 3

$c = 5x \longrightarrow$ diretamente proporcional a 5



Pela relação: $a + b + c = 180°$

$2x + 3x + 5x = 180°$

$10x = 180°$

$x = \frac{180°}{10} = 18° \Rightarrow a = 2 \cdot 18 = 36°$

$b = 3 \cdot 18 = 54°$

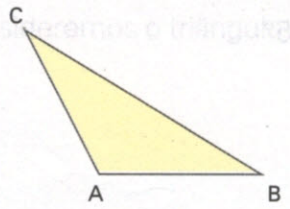
$c = 5 \cdot 18 = 90°$

As medidas dos ângulos são 36°, 54° e 90°.

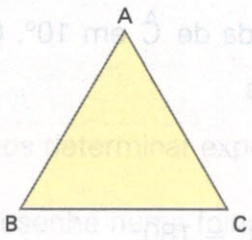
FIXAÇÃO

1 Com o auxílio de uma régua, efetue as medições necessárias e classifique os triângulos quanto aos lados:

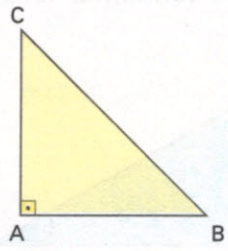
a)



b)

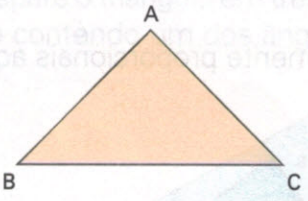


c)

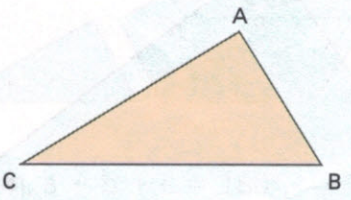


2 Com o auxílio de um esquadro, efetue as medições necessárias e classifique os triângulos quanto aos ângulos:

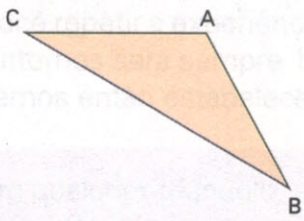
a)



b)



c)

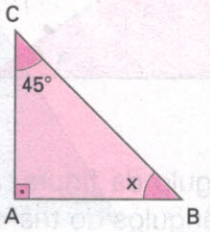


3 Dois ângulos de um triângulo medem, respectivamente, 35° e 55°. Qual a medida do terceiro ângulo?

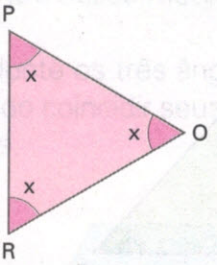
4 É possível construir um triângulo com dois ângulos retos? Justifique sua resposta.

5 Nas figuras abaixo, determine o valor de *x*:

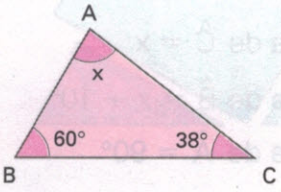
a)



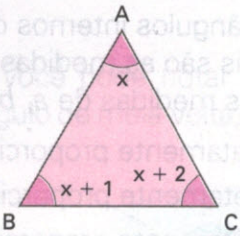
b)



c)



d)



6 Um triângulo tem dois ângulos com a mesma medida. Sabe-se que o terceiro ângulo mede 50°. Qual é a medida dos ângulos congruentes?

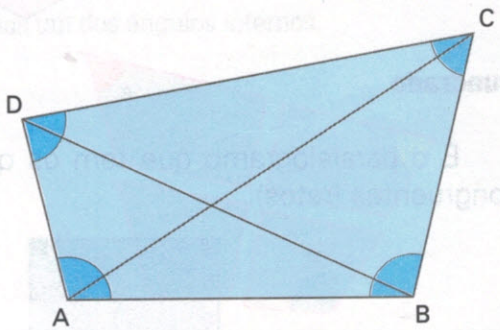
7 As medidas dos ângulos internos de um triângulo são diretamente proporcionais a 1, 4 e 10. Nessas condições, responda:

a) Quais as medidas dos ângulos desse triângulo?

b) Qual a classificação desse triângulo quanto aos ângulos?

OS QUADRILÁTEROS E SEUS ELEMENTOS

Como você já viu anteriormente, *quadrilátero* é um polígono de quatro lados.
No quadrilátero ABCD ao lado, podemos destacar:



- ✓ Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são os *vértices* do quadrilátero ABCD.
- ✓ Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ são os *lados* do quadrilátero ABCD.
- ✓ Os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ assinalados na figura são os *ângulos internos* do quadrilátero ABCD.
- ✓ O segmento $\overline{AC}$, cujas extremidades são dois vértices não-consecutivos, é uma *diagonal* do quadrilátero ABCD. O segmento $\overline{BD}$ é a outra diagonal desse quadrilátero.

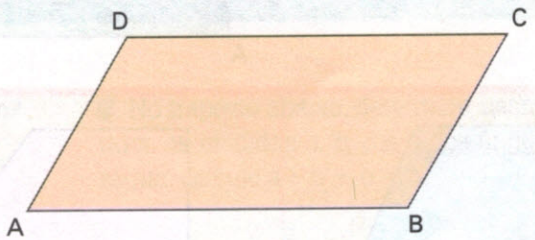
CONHECENDO ALGUNS QUADRILÁTEROS ESPECIAIS

Paralelogramos

O *paralelogramo* é o quadrilátero que tem os lados opostos paralelos, dois a dois.

Paralelogramo ABCD:

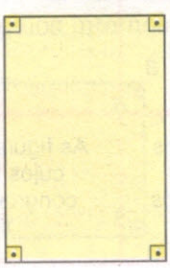
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

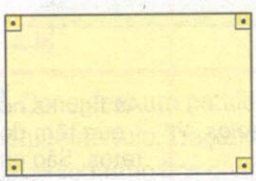


Dentre os paralelogramos, podemos destacar:

Retângulo

É o paralelogramo que tem os quatro ângulos congruentes (os 4 ângulos são retos).



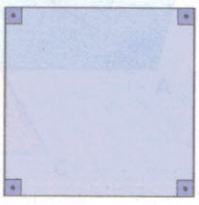


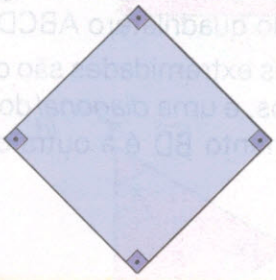
Losango

É o paralelogramo que tem os quatro lados congruentes.

Quadrado

É o paralelogramo que tem os quatro lados congruentes e também os quatro ângulos congruentes (retos).



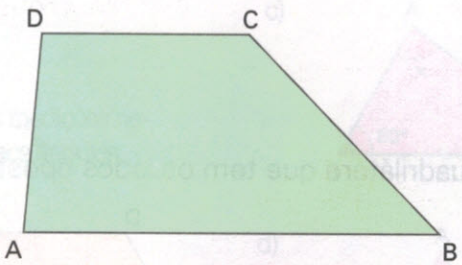


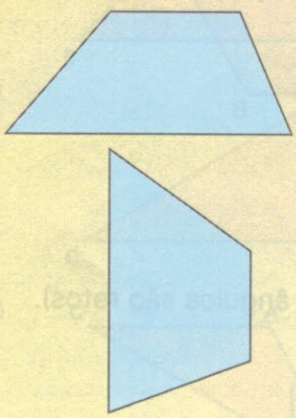
Trapézios

O trapézio é o quadrilátero que possui apenas dois lados paralelos.

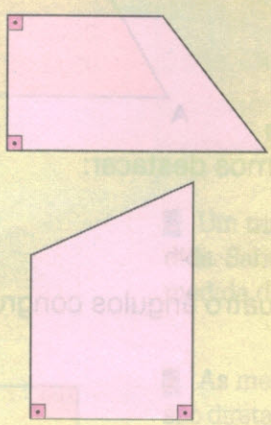
Trapézio ABCD:

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

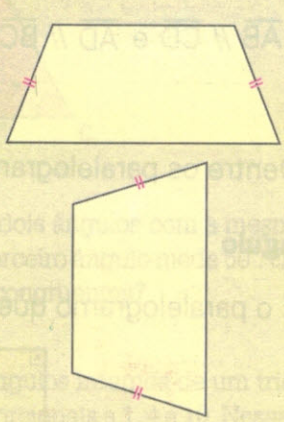




As figuras nos mostram *trapézios escalenos*.



As figuras nos mostram trapézios que têm dois ângulos internos retos. São os chamados *trapézios retângulos*.

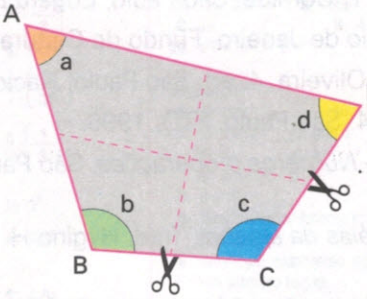


As figuras nos mostram trapézios cujos lados não-paralelos são congruentes. São os chamados *trapézios isósceles*.

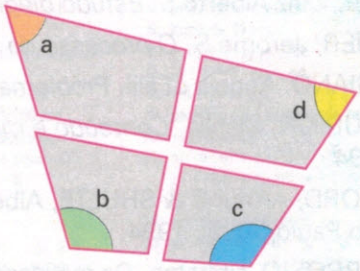
Explorando Geometria

A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero

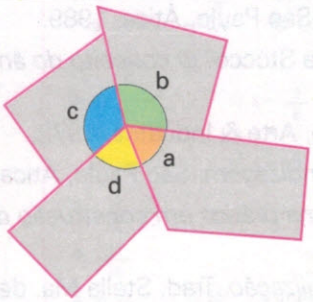
1. Num pedaço de cartolina, desenhe um quadrilátero ABCD qualquer e pinte cada ângulo interno de uma cor.



2. Usando uma tesoura, recorte o quadrilátero em 4 partes de modo que cada parte fique com apenas um dos ângulos internos.



3. Junte as 4 partes da figura, de modo que os vértices dos 4 ângulos coincidam, como na figura ao lado.

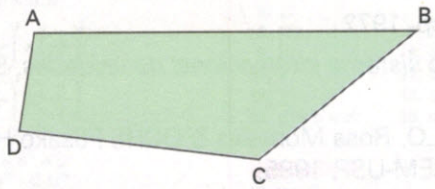


4. O que você pode concluir em relação à soma das medidas dos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$?

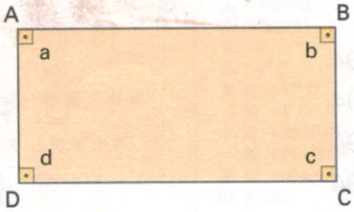
5. Compare o resultado que você obteve com o de seus colegas. O que você conclui?

FIXAÇÃO

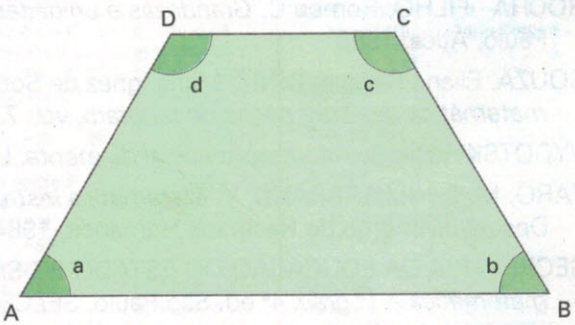
1 O quadrilátero da figura abaixo é um paralelogramo? Justifique sua resposta.



2 Sabemos que o retângulo possui os quatro ângulos congruentes e retos. No retângulo abaixo, determine o valor de a + b + c + d, onde *a*, *b*, *c* e *d* são as medidas dos quatro ângulos internos do retângulo.



3 No trapézio abaixo, determine, usando um transferidor, as medidas *a*, *b*, *c* e *d* dos ângulos internos. A seguir, calcule a + b + c + d.



4 Considere um paralelogramo que é losango e também retângulo. Traçando uma de suas diagonais, esse paralelogramo fica dividido em dois triângulos de que tipo?

Bibliografia

ASOCIACION DE MAESTROS ROSA SENSAT. *Didactica de los numeros enteros*. Madri, Nuestra Cultura, 1980.

BORDENAVE, Juan Díaz & PEREIRA, Adair Martins. *Estratégias de ensino-aprendizagem*. 7. ed. Petrópolis, Vozes, 1985.

BORIN, Júlia. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*, vol. 6. São Paulo, CAEM-USP, 1995.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1996.

BRASIL, Luíz Alberto S. *Estudo dirigido de Matemática*. 2. ed. Rio de Janeiro, Fundo de Cultura, 1967.

BRUNER, Jerome S. *O processo da educação*. Trad. Lobo L. de Oliveira. 4. ed. São Paulo, Nacional, 1974.

CAGGIANO, Angela et alii. *Problema não é mais problema*, vol. 4. São Paulo, FTD, 1996.

CENTURIÓN, Marília. *Conteúdo e metodologia da matemática – Números e operações*. São Paulo, Scipione, 1994.

COXFORD, Arthur F. & SHULTE, Albert P. (organizadores). *As idéias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo, Atual, 1994.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação – reflexões sobre Educação e Matemática*. São Paulo/ Campinas, Summus/Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas*. São Paulo, Ática, 1989.

DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira, & SMOLE, Kátia Cristina Stocco. *O conceito do ângulo e o ensino de Geometria*, vol. 3. São Paulo, CAEM-USP, 1993.

ESTEVES, O. P. *Testes, medidas e avaliação*. Rio de Janeiro, Arte & Indústria, 1972.

HAYDT, Regina Cazaux. *Avaliação do processo ensino-aprendizagem*. São Paulo, Ática, 1988.

HOFFMANN, Jussara Maria Lerch. *Avaliação mediadora: uma prática em construção da pré-escola à universidade*. Porto Alegre, Educação & Realidade, 1993.

IFRAH, Georges. *Os números: a história de uma grande civilização*. Trad. Stella Ma. de Freitas Senra. 4. ed. São Paulo, Globo, 1992.

LINDQUIST, Mary Montgomery & SHULTE, Albert P. (organizadores). *Aprendendo e ensinando geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo, Atual, 1994.

MACHADO, Nilson José. *Matemática e língua materna*. São Paulo, Cortez, 1990.

OCHI, Fusako Hori; PAULO, Rosa Monteiro; YOKOYA, Joana Hissae & IKEGAMI, João Kazuwo. *O uso de quadriculados no ensino de geometria*. vol. 1. São Paulo, CAEM-USP, 1992.

PIAGET, Jean. *Fazer e compreender matemática*. São Paulo, Melhoramentos, 1978.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro, Interciência. 1978.

RATHS, Louis E. et alii. *Ensinar e pensar*. São Paulo, Herder/Edusp, 1972.

ROCHA - FILHO, Romeu C. *Grandezas e unidades de medida – o sistema internacional de unidades*. São Paulo, Ática, 1988.

SOUZA, Eliane Reame; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira; PAULO, Rosa Monteiro & OCHI, Fusako Hori. *A matemática das sete peças do tangram*, vol. 7. São Paulo, CAEM-USP, 1995.

VYGOTSKY, Lev S. *A formação social da mente*. Lisboa, Antídoto, 1979.

ZARO, M. & HILLERBRAND, V. *Matemática instrumental e experimental*. Porto Alegre, Fundação para o Desenvolvimento de Recursos Humanos, 1984.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, *Proposta curricular para o ensino de matemática – 1º grau*. 4ª ed. São Paulo, SE/ CENP, 1994.

_____. *Experiências matemáticas*: 5ª série. São Paulo, SE/CENP, 1994.

_____. *Experiências matemáticas*: 6ª série. São Paulo, SE/CENP, 1994.

_____. *Experiências matemáticas*: 7ª série. São Paulo, SE/CENP, 1994.

_____. *Experiências matemáticas*: 8ª série. São Paulo, SE/CENP, 1994.

Respostas dos exercícios

Unidade 1

Página 10

1. a) 7^3 b) 4^5 c) a^2 d) 8^{10} e) y^{25} f) $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ g) $(0,9)^3$ h) $\left(\frac{3}{10}\right)^{20}$ i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{16}$

2. a) 4^2 b) 2^3

3. $\frac{4}{25}$ **4.** 0,99

5. não, pois $121 \neq 85$

6. a = b **7.** 0,04

8. a) x = 2 b) x = 0 c) x = 0 d) x = 1

9. a) 1 000 b) 16 c) 343 d) 625 e) 121 f) $\frac{8}{125}$ g) $\frac{1}{32}$ h) $\frac{81}{25}$ i) 1 j) 2,89 l) 0,027 m) 1

Página 14

1. a) 7^9 b) 13^{12} c) 10^{13} d) 7^{16} e) 8^1 f) a^{23} g) x^{30} h) $(0,6)^3$ i) $\left(\frac{3}{4}\right)^9$ j) $\left(\frac{7}{9}\right)^5$ l) $(0,9)^{12}$ m) $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ n) $(1,7)^{40}$ o) a^{36}

2 a) 2^{20} b) 2^2 c) 2^{18} d) 2^6 e) 2^{28} f) 2^{21} g) 2^{25} h) 2^8 i) 2^{20}

3. $x^3 = 10^{12}$, $y^4 = 10^{12}$, $x^3 = y^4$

4. a) $7^2 \times 17^2$
b) $5^3 \times 11^3 \times 23^3$
c) $2^{12} \times 3^4$
d) $3^{10} : 5^5$
e) $(0,6)^4 \times (1,1)^4$
f) $\left(\frac{1}{2}\right)^9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3$
g) $\left(\frac{1}{7}\right)^7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$
h) $x^{14} : y^8$
i) $m^{12} \times n^{10} \times p^2$
j) $(2,3)^{12} : (2,1)^{15}$

5. a) 36 b) 216

6. 7

7. a) 10^3 b) 10^4 c) 10^7 d) 10^9

8. giga: 10^9; mega: 10^6; miria: 10^4; quilo: 10^3; hecto: 10^2; deca: 10^1

9. a) 35×10^3 b) 6×10^7 c) 92×10^4 d) 92×10^9

10. 15×10^7 km

11. 64×10^5 m

Página 16

1. a) n^3 b) a^2 c) b^8 d) x^3

2. $(1,1)^2 = 1,21$

3. a) $a^8 \times b^8 \times c^7$ b) $a^{18} \times b^{11}$

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

5. $(0,4)^3 = (0,064)$

6. $a^7 \times b^6$

7. a) 252 b) 756 c) 3

8. 10 **9.** 4

10. $a^{10} \times b^{13} \times c^7$

Página 18

1. a) sim b) sim

2. a) não é b) é c) é d) não é e) é f) é g) é h) não é i) é

3. 6 e 10

4. Sim, todos os fatores apresentam expoente par.

5. Qualquer algarismo que represente um número ímpar.

Página 19

1. a) 8 b) 7 c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{7}{3}$ e) 0,9 f) 0,6 g) 0,02 h) 0,04

2. a) x = 9 b) x = 10 c) $x = \frac{3}{4}$ d) $x = \frac{1}{6}$ e) x = 0,7 f) x = 1,1

3. $\frac{13}{20}$

4. $\frac{11}{14}$

5. a) 22 b) 27 c) 26 d) 16 e) 42 f) 48 g) 54 h) 64

6. 1 120

7. a) 2,5 b) 0,28 c) 3,5 d) 5,5 e) 0,32 f) 7,2

8. $a^2 \times b^5$

9. $2^6 = 64$

10. 39

Retomando o que aprendeu

Página 20

1. Uma: a igualdade *c*

2. não **3.** 4

4. sim, pois $2\,916 = 2^2 \times 3^6$

5. 10

6. 252 **7.** 2

8. sim **9.** 5

10. 4 **11.** 5,2

12. 1,7 **13.** $a^{17} \times b^{15}$

14. $a^3 \times b \times c^5$ **15.** 0,79

Unidade 2

Página 27

1. a) −8 pontos b) −6 c) +R$ 550,00 d) +1 200 m e) +42° C f) +63 km g) +21 gols h) −25 cm i) −4 000 m

2. −484

3. +6 959 m

4. −395 m

5. −3

6. −2° C

7. a) +51° C b) −4° C c) 55 graus

8. a) +R$ 50,00 b) +R$ 500,00 c) +R$ 400,00 d) −R$ 20,00

9. a) −60 km b) +30 km

10. 90 km

Página 28

1. $\mathbb{Z}_+$ = conjunto dos números inteiros não-negativos

2. a) todos
b) 0, +7, +2
c) 0, −10, −50
d) +7, −10, +2, −50
e) +7, +2
f) −10, −50

3. a) ∈ b) ∉ c) ∈ d) ∉ e) ∈ f) ∈

4. sim

Página 30

1. +60 km

2. avião *A*: −50 km; avião *B*: +150 km

3. a) +4 b) −2 c) +6 d) +9 e) −5

4. cidade *B*: −200 km; cidade *C*: +600 km

5. a) 200 km b) 500 km c) 600 km d) 300 km e) 1 100 km f) 900 km

6. a) +2 b) o ponto *S* c) o ponto *Q* d) −5

Página 33

1. a) 5 b) 8 c) 3 d) 7 e) 7 f) 8 g) 5 h) 8

2. a) 27 b) 33 c) 61 d) 37 e) 39 f) 38 g) 55 h) 60

3. a) 140 quilômetros
b) 15 graduações
c) 50 quilômetros
d) 24 graduações
e) 145 quilômetros

4. a) 31 b) 300 c) 28 d) 500 e) 0

5. +20 e −20

6. a) Módulo de mais onze é igual a onze.
b) Módulo de menos trinta é igual a trinta.

7. a) > b) < c) > d) =

8. −2, −1, 0, +1, +2

9. a) −13, +20, +27, −25
b) −32, −40
c) +51

10. não

11. números opostos ou simétricos

12. a) +26 b) −65

13. −20 **14.** −2

16. −250 **17.** 0

Página 37

1. a) −2 > −6
b) −20 < −10
c) −7 < +1

2. a) a > 0 b) b < 0 c) c > 0 d) 0 > d e) a > b f) a > c g) d < a h) b < c i) b > d

3. a) 0 < +7 b) +11 > 0 c) 0 > −9 d) −13 < 0 e) +2 > −19 f) −30 < +6 g) +7 < +20 h) −11 > −30 i) −1 < +5 j) −20 < −3

4. a) −10 b) −19 c) −1 d) +1 e) +10 f) +30

5. a equipe *B*

6. a) −100, −70, −10, 0, +20, +80
b) +12, +7, +1, −100, −160, −300, −500

7. a equipe *A*

8. a) −7 b) −5 c) a equipe *B* d) −5 > −7

9. a) +6, −1, +2, −4, 0
b) −20, −1, −7, −4, 0

10. a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -20\} =$
$= \{-19, -18, -17, -16, -15, -14, ...\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -7\} =$
$= \{..., -13, -12, -11, -10, -9, -8\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x < +3\} =$
$= \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2\}$

11. a) P = {−3, −2, −1, 0, 1, 2, ...}
b) Q = {−8, −7, −6}
c) R = {..., −106, −105, −104, −103, −102, −101}

12. a) três b) dois
c) −5, −4, −3, −2, −1, +1, +2

13. vazio **14.** sim

15. quatro elementos

Página 46

1. a) +11 b) −13 c) +30 d) −37 e) −59 f) +42 g) +12 h) −11 i) −255 j) +170 l) +310 m) −437

2. (+13) + (+18) = +31

3. (−2) + (−1) = −3

4. (+3 600) + (−4 000) = −400

5. lucro de 17 reais

6. (−3) + (−8) = −11

7. (+12) + (−8) = +4

8. −44 ou 44 a.C.

9. prejuízo de 4 milhões de reais

10. −30 graus

11. a) (+18) + (−21) = −3
b) (+24) + (−25) = −1
c) a equipe *B*

12. prejuízo de 16 reais

13. a) +4 b) −4 c) +7 d) +6 e) −6 f) +3 g) −10 h) +2 i) −6 j) −9

14. +R$ 1 200,00

15. a) +12 b) −92 c) −32 d) +17 e) −10 f) −13 g) +18

16. lucro de R$ 4 milhões

17. −9 **18.** 0

19. sim

20. a) −22 b) −90 c) +34 d) −39

21. 0

Página 48

1. a) +2 b) −9 c) −98 d) +89 e) +1

2. a) +24 b) −10 c) +5 d) −8 e) −4 f) −51 g) +45 h) +29 i) −23 j) +34 l) −80 m) +4

3. a) +23 b) 0 c) +1 d) −86 e) +115 f) −16 g) +10 h) −37 i) −21 j) +57 l) −13 m) +50

Página 51

1. −56 graus **2.** 33 anos

3. +11 graus **4.** 74 anos

5. +380 pontos **6.** +870 metros

7. 9 graus **8.** +34 graus

9. a) +17 b) −25 c) −7 d) −18 e) +18 f) +11 g) −21 h) −40 i) +73 j) +9

11. a) −5 450 b) +11 180 c) −2 115 d) +7 010

Explorando

Página 54

1. a) julho
b) janeiro e fevereiro

2. maior

3. a) −6 (queda de 6° C)
b) 3 (aumento de 3° C)

4. a) ≅ 3,6° C b) 9,5° C

Página 55

1. a) −9 b) +11 c) −13 d) +21 e) 3 + 2 f) +1 − 10 g) 7 + 6 − 3 h) 1 + 1 − 5 i) 9 − 4 − 2 j) −1 − 1 + 4

2. x = −3; negativo

3. a) −2 b) +4 c) −8 d) +2 e) −13 f) −2 g) −3 h) 0

4. x = −4; y = +5; x < y.

5. +18; −1; +7; +116; +3; +90.
a) laranja
b) azul

6. a) +11 c) −29 e) +57
b) −6 d) +43 f) −37

7. sim

Página 60

1. a) −72 f) −55 l) +231
b) +30 g) 0 m) −340
c) +28 h) +108 n) +289
d) +63 i) +63 o) +160
e) −48 j) 0

2. a) +154 d) +324
b) −135 e) −1 120
c) +216 f) 0

3. (+1) · (+20); (−1) · (−20); (+2) · (+10); (−2) · (−10); (+4) · (+5); (−4) · (−5)

4. x = +29; positivo

6. −7 · (+6 −8) = −7 · (−2) = + 14 ou −7 · (+6 −8) = −7 · (+6) + (−7) · (−8) = = −42 + 56 = 14

7. (−5) · (−8) + (−5) · (+5) = +40 − 25 = 15

8. a) +1 c) 0
b) +9 d) +11

9. a) +1 d) 0 g) +46
b) −2 e) +39 h) −17
c) −5 f) +11

10. a) −3 b) −10 c) +2

11. a) +4 c) +73 e) −2
b) +6 d) 0 f) +2

12. a) −2 e −3 b) +5 e −2

13. a) 0 c) −20
b) +20 d) +100

14. a) +81 b) +16 c) +36

Página 62

1. negativo **2.** positivo

3. zero

4. (+9) : (−9); 0 : (+5); (−2) : (+1)

5. −16 **6.** sim

7. a) −3 g) −15 n) −4
b) +1 h) +26 o) −8
c) +3 i) +13 p) +3
d) −9 j) −15 q) −3
e) 0 l) +4
f) −1 m) +3

10. a) +1 b) −1

11. a) +11 d) −2 g) +21
b) −15 e) 0 h) −3
c) −11 f) −10 i) 0

12. a) −12 e) +24
b) −6 d) +60

13. a) +7 c) −8
b) +9 d) −8

14. a) não b) sim

Página 66

1. positivo **2.** negativo

3. a) $(-17)^2 = +289$
b) $(+15)^3 = +3\,375$
c) $(+40)^2 = +1\,600$
d) $(-30)^3 = -27\,000$
e) $(-5)^4 = +625$
f) $(+3)^6 = +243$
g) $(+5)^4 = +625$

4. a) +81 i) −343
b) +81 j) +1
c) +729 l) −1
d) −729 m) +625
e) +32 n) +1 000 000
f) −32 o) −1
g) +1 p) +1
h) +81 q) +1

5. a) 0 b) +2

6. a) $(-8)^{10}$ e) $(-13)^6$
b) $(+2)^{12}$ f) $(+7)^{12}$
c) $(-10)^3$ g) $(+10)^{14}$
d) $(+9)^{20}$ h) $(+20)^1$

7. a) +16 b) −8

8. a) +1 d) +68 g) +41
b) −1 e) −100 h) −32
c) −12 f) +22

9. a) −26 c) 0 e) +109
b) +17 d) +152

10. +28

11. +64 **12.** −3

Página 68

1. a) 5 c) não existe
b) 8 d) 1

2. $\sqrt{37}$ e $\sqrt{80}$

3. a) 6 c) 10
b) −8 d) −7

4. a) 20 c) −50
b) −30 d) 12

5. +11

6. −1 **7.** não

Página 70

1. +63 **2.** −14

3. −24 **4.** −2

5. +21 **6.** +6

7. +38 **8.** −2

9. −22 **10.** +78

Retomando o que aprendeu

Página 70

1. (+2) **2.** +2

3. −10 **4.** 680 m

5. −8 **6.** 7 graus

7. $(+2)^5 = +32$; $(-6)^2 = +36$; $(-1)^{10} = +1$

8. −3 **9.** 5 elementos

10. uma; *b*

11. cidade *B*, pois −15 > −27

12. a) +1 b) −1

13. a) −16 b) +64

14. −36

15. +4

16. +625

17. 74

18. prejuízo de 450 reais

19. −3x

20. −200 **21.** +37

Unidade 3

Página 77

1. É verdade.

2. a) ℤ, ℚ c) ℚ
b) ℕ, ℤ, ℚ d) ℚ

3. sim

4. a) 0,5 b) −1, 0,5 c) todos

5. 0, $\frac{2}{3}$, 5

6. a) ∉ d) ∉ g) ∈ j) ∉
b) ∈ e) ∉ h) ∈ l) ∉
c) ∈ f) ∈ i) ∈ m) ∈

Página 79

1. a) ponto *R*
b) $-\frac{1}{3}$
c) $-\frac{5}{3}$ ou $-1\frac{2}{3}$
d) ponto *A*
e) ponto *M*

2. a) +2
b) $-\frac{3}{2}$ ou $-1\frac{1}{2}$
c) ponto *D*
d) ponto *E*
e) $+\frac{1}{2}$

Página 81

1. a) $-\frac{2}{9}$ f) $+\frac{3}{20}$
b) $+\frac{1}{8}$ g) $+\frac{1}{4}$
c) $+\frac{1}{5}$ h) −2,08
d) −0,65 i) $+\frac{9}{5}$
e) $-\frac{4}{15}$ j) $-\frac{17}{12}$

2. a) +1 d) $+\frac{3}{8}$
b) $-\frac{9}{20}$ e) $+\frac{4}{9}$
c) −0,74

3. a) 11,7 graus b) 10 graus

4. a) $-\frac{17}{12}$ c) $+\frac{11}{12}$
b) $+\frac{1}{12}$

5. 24,40 m

6. $+\frac{33}{20}$

7. −9,56

8. −4,7

9. 1,5 grau

10. $x = -\frac{5}{6}$; entre −1 e 0

11. $-\frac{7}{4}$

Página 83

1. a) $-\frac{4}{15}$ e) $-\frac{2}{3}$
b) $+\frac{12}{11}$ f) −9,60
c) $+\frac{3}{8}$ g) $+\frac{1}{4}$
d) $+\frac{1}{4}$ h) +1,47

2. a) $-\frac{3}{14}$ d) +4,68
b) $+\frac{1}{27}$ e) $-\frac{9}{50}$
c) $-\frac{3}{20}$ f) $+\frac{1}{50}$

3. a) $-\frac{5}{4}$ c) $+\frac{14}{3}$
b) +2,4 d) −13

4. −12,50 m

5. 9,9 ℓ

6. $-\frac{1}{15}$

7. +0,6

8. $-\frac{1}{12}$

9. a) $-\frac{1}{18}$ d) 0
b) −0,5 e) $+\frac{1}{8}$
c) $-\frac{1}{30}$

10. a) $+\frac{7}{6}$ b) $+\frac{7}{4}$

11. $-\frac{9}{16}$

Página 87

1. a) $-\frac{2}{3}$ g) $-\frac{11}{3}$
b) $+\frac{6}{11}$ h) $+\frac{3}{28}$
c) $+\frac{1}{6}$ i) $+\frac{2}{3}$
d) $-\frac{1}{5}$ j) −12
e) $+\frac{2}{7}$ l) $+\frac{1}{2}$
f) $-\frac{5}{2}$ m) $-\frac{2}{3}$

2. a) −4 e) +0,6
b) +0,75 f) −7,6
c) −4,3 g) +6
d) −0,5 h) −2,4

3. a) $-\frac{1}{5}$ c) $+\frac{2}{5}$
b) $+\frac{2}{3}$ d) $-\frac{3}{2}$

4. a) $-\frac{3}{2}$ c) $-\frac{10}{9}$
b) $+\frac{2}{3}$

5. a) $+\frac{2}{5}$ b) +0,4

6. −0,2

7. a) $+\frac{11}{10}$ d) $+\frac{20}{9}$
b) $-\frac{1}{20}$ e) $-\frac{2}{3}$
c) +2,5 f) −2,25

8. $+\frac{15}{8}$

9. −1 e −2

Página 91

1. a) $\left(+\frac{9}{10}\right)^3$ c) $\left(-\frac{11}{8}\right)^2$
b) $(-2,4)^5$ d) $(+0,05)^3$

2. a) $\left(-\frac{5}{7}\right)^2 = +\frac{25}{49}$
b) $(+0,8)^3 = +0,512$
c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = +\frac{1}{16}$
d) $(-2,5)^2 = +6,25$

3. a) $+\frac{1}{81}$ g) $+\frac{7}{3}$
b) $+\frac{1}{16}$ h) +17,64
c) $+\frac{1}{64}$ i) $+\frac{49}{25}$
d) −0,343 j) +1
e) +1 l) $+\frac{36}{25}$
f) +0,729 m) $+\frac{9}{100}$

4. a) $+\frac{1}{16}$ b) $-\frac{1}{64}$

5. a) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{13}{5}$
b) $-\frac{1}{36}$ e) +1
c) $+\frac{3}{8}$

6. a) $-\frac{63}{8}$ c) $+\frac{13}{4}$
b) $-\frac{33}{4}$

7. $+\frac{1}{16}$

8. −10

9. a) $\left(-\frac{7}{4}\right)^{10}$ d) $(-4,7)^{10}$
b) $(+7,5)^3$ e) $(-0,02)^{11}$
c) $\left(+\frac{2}{5}\right)^{20}$ f) $\left(-\frac{3}{8}\right)^{20}$

10. a) $\frac{1}{9}$ f) $-\frac{1}{9}$
b) $\frac{1}{1\,000}$ g) $+\frac{5}{2}$
c) $\frac{1}{64}$ h) $+\frac{16}{9}$
d) $-\frac{1}{64}$ i) $-\frac{8}{27}$
e) $+\frac{1}{100}$ j) −32

11. a) +27 c) +36
b) $+\frac{81}{16}$ d) $+\frac{5}{6}$

12. a) +1,44 c) 0,125
b) 0,0001 d) −0,25

13. a) 10^{-2} b) 10^{-6} c) 10^{-3}

14. 2

Página 95

1. a) 6 b) 0,7 c) $\frac{2}{3}$

2. a) x = 10 d) x = 0,04
b) x = 1,1 e) x = 5
c) $x = \frac{1}{4}$ f) $x = \frac{6}{7}$

3. a) 48 c) 42
b) 26 d) 50
4. a) 3,5 c) 5,5 e) 0,28
b) 3,6 d) 5,4 f) 0,32
5. $\frac{11}{14}$ **6.** $a^5 \cdot b^2$
7. 7 **8.** $\frac{8}{15}$

Página 97

a) $-\frac{5}{3}$ d) $+\frac{3}{2}$ g) $+\frac{3}{2}$
b) $+\frac{7}{6}$ e) $-\frac{3}{10}$ h) -1
c) $-\frac{33}{16}$ f) $+\frac{1}{9}$ i) $-\frac{1}{16}$

Página 99

1. -3 **2.** 13,2
3. 17,40 reais **4.** 31,75 anos
5. $\frac{19}{36}$ **6.** 2,02 m
7. 57 centavos
8. a) 14 gols c) 2,8 gols
b) 9 gols d) 1,8 gol
9. 23,75 anos
10. 7,2
11. R$ 25,75

Retomando o que aprendeu

Página 100

1. as três **2.** +0,5
3. 0,35 **4.** $+\frac{3}{4}$
5. -1 e -2 **6.** 13,12 anos
7. $-0{,}125$
8. a) $1^3 = 1$ c) 1
b) sim
9. +4 **10.** 3,75 m
11. 400 km **12.** $+\frac{1}{9}$
13. $+\frac{1}{7}$

Unidade 4

Página 106

1. a) $1^2\,m = 5^2 + 2$; $2^2\,m = 7 \cdot 4 - 1$
b) $1^2\,m = 13^2 - 12^2$; $2^2\,m = 5^2$
c) $1^2\,m = 10 \cdot 2^2$; $2^2\,m = 2^3 + 2^5$
d) $1^2\,m = 2^3 \cdot 2^7$; $2^2\,m = 2^9 \cdot 2$
2. propriedade reflexiva
3. $a = -7$; transitiva
4. sim; propriedade simétrica
5. sim; $x = z - 2$; propriedade transitiva
6. $(21) \cdot \frac{1}{7}$ **7.** $8 - 6$
8. multiplicativo
9. a) $x = 4$ b) $x = -3$
10. a) $x = 7$ b) $x = -5$

Página 108

1. É uma equação, pois representa uma igualdade e tem um elemento desconhecido.
2. $x + 1 = 0$; $x - 1 = 0$; $x = -1$
3. Embora ela seja uma igualdade, não apresenta número desconhecido.
4. uma incógnita
5. duas incógnitas
6. $7y - 2$
7. a) $x + 31 = 100$
b) $x - 8 = 41$
c) $2x + 31 = 73$
d) $3x - 13 = 47$
e) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 35$
f) $4x = x + 72$
8. $x + 10 = 28$
9. $\frac{x}{4} + x = 50$ (Onde x representa o comprimento do pedaço maior.)
10. $3x = 2(x + 10)$

Página 112

1. a) S = {7} h) S = {−10}
b) S = {−9} i) S = {−1}
c) $S = \left\{\frac{3}{8}\right\}$ j) S = {−1}
d) S = ∅ l) S = {12}
e) S = {13} m) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
f) S = {−4}
g) S = {−8}
2. a) sim c) sim e) sim
b) não d) sim
3. 2 e 3 **4.** $-\frac{1}{6}$
5. sim

Página 118

1. a) sim d) sim g) sim
b) sim e) não h) sim
c) não f) sim
2. a) $x = 3$ g) $x = \frac{7}{3}$
b) $x = 11$ h) $x = 3$
c) $x = -2$ i) $x = \frac{6}{5}$
d) $x = 1$ j) $x = \frac{2}{3}$
e) $x = 1$ l) $x = \frac{1}{6}$
f) $x = 9$ m) $x = -\frac{1}{6}$

Página 125

1. a) S = {8} f) $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$
b) S = {6} g) S = {−1}
c) S = {2} h) S = {2}
d) $S = \left\{-\frac{9}{2}\right\}$ i) S = {10}
e) S = {3} j) $S = \left\{\frac{7}{3}\right\}$
2. a) S = {4} f) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
b) S = {−2} g) S = {1}
c) S = {2} h) S = {2,7}
d) $S = \left\{-\frac{9}{2}\right\}$ i) S = {5}
e) S = {3} j) S = {6}
3. a) $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$ f) S = {6}
b) S = {5} g) S = {2}
c) S = {6} h) S = {2}
d) S = {−4} i) S = {5}
e) S = {4}
4. a) S = {10} e) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
b) $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$ f) S = {−40}
c) S = {30} g) S = {40}
d) $S = \left\{-\frac{10}{7}\right\}$ h) S = {26}
5. a) S = {8} f) S = {4}
b) S = {−16} g) $S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$
c) $S = \left\{\frac{26}{5}\right\}$ h) $S = \left\{-\frac{1}{6}\right\}$
d) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ i) S = {4}
e) S = {3} j) S = {4}
6. $3x - 5 = 4$ e $5x - 7 = 8$
7. não **8.** 0 e 1
9. a) 2 b) 4 c) 8 d) $\frac{1}{2}$
10. um número negativo
11. $\frac{21}{4}$ **12.** $\frac{6}{5}$
13. a) 1, 2, 5, 10
b) 1
c) 100
14. $\frac{10}{3}$

Página 130

1. 37 **2.** 45
3. 96 **4.** 6
5. 40 anos **6.** 20 anos
7. 3 000 m² **8.** 158
9. a) 6 000 ℓ b) 3 600 ℓ
10. R$ 54 000,00
11. 63 caixas
12. 180 páginas
13. 2 350 pessoas
14. 63
15. 316 funcionários
16. 45 cm e 75 cm
17. 24 alunos
18. 35 alunos; 25 alunos
19. 3 galinhas e 10 coelhos
20. 335 e 286
21. Sérgio: 77; Toninho: 87
22. 100 × 85
23. a) 258 km
b) 86 km
c) 344 km
24. 30 vitórias

Página 133

1. 10 cm e 20 cm
2. 8 cm, 9 cm, 10 cm
3. 50 cm **4.** 16 m
5. 10 m **6.** 30 m
7. *c* **8.** sim
9. sim **10.** 50 176
11. 2
12. $\frac{3}{4}x + 2x = \frac{1}{2}x - 5$
13. 16
14. 90 pontos e 83 pontos
15. 8
16. 10 professores
17. 102 litros
18. $3p + q = 9$
19. 30 recenseadores
20. R$ 12,00 (bola de voleibol) e R$ 15,00 (bola de basquete)
21. R$ 250,00
22. a) 30 jogos c) 10 jogos
b) 18 jogos
23. a) 30 aulas c) 6 aulas
b) 12 aulas
24. 0,65 m e 1,30 m

Página 138

1. a) $x + y = 61$
b) $2x - 7 = y$
c) $3x + 5y = 100$
d) $x = y + 7$ ou $x - y = 7$
e) $\frac{1}{2}x = 2y$
f) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y = 1$
2. $x + y = 51$ **3.** $x - y = 2$
4. a) $x + y = 32$ c) $x = 6y$
b) $x = y + 25$ d) $2x + 5y = 60$
5. a) $x + y = 20$ d) $\frac{1}{2}x = 5y$
b) $x = 3y$ e) $4x + 2y = 42$
c) $x = y + 12$
6. a) sim c) sim
b) não d) sim
7. a) não b) sim c) não
8. (2, 1) **9.** sim
10. Existem várias possibilidades de respostas.
11. a) (0, 20) c) $\left(-\frac{3}{4}, 23\right)$
b) (5, 0) d) (2,5, 10)
12. a) (1, 1) c) $\left(2, \frac{13}{3}\right)$
b) $\left(-\frac{1}{5}, -3\right)$ d) $\left(\frac{2}{5}, -1\right)$
13. a) $y = 2$
b) $y = -3$
c) $y = -\frac{5}{4}$
14. a) $4x = 3y$ c) 9 cm
b) 20 cm

Página 144

1. $\begin{cases} x + y = 201 \\ x = 2y \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + y = 15 \\ 3x + 5y = 50 \end{cases}$
3. sim
4. não **5.** não
6. a) (12, 8) c) (−2, 4)
b) (−6, −3)
7. a) (8, 2) c) (10, −1)
b) (−6, −36)
8. a) (4, 2) e) (2, 8)
b) (2, 1) f) (1, 3)
c) (3, 2) g) (30, 20)
d) (2, 1) h) (−6, −1)
9. 15 carros e 7 motos
10. 7 reais
11. 18 reais (lapiseira) e 6 reais (caneta)
12. 1,89 m e 0,96 m
13. 100 páginas
14. 6 professores

Explorando

Página 145

a) 156 859 139
b) Estava mais próximo do Japão.
c)

ano	índice
60	74,4
65	39,3
71	34,4
75	23,8
80	18,8
85	15,6
90	12,3
96	9,8

Retomando o que aprendeu

Página 146

1. $3x + 10 = 6y$
2. $2x - y = 10$
3. sim **4.** não
5. a) (3, −4) b) (13, −18)
6. $y = -20$
7. Existem várias possibilidades de respostas.
8. sim **9.** (4, 1)
10. 25 **11.** 2
12. a) $2x + 10 = 4y$
b) 13 cm c) 25 cm
13. sim
14. $x = 1$ e $y = -\frac{1}{2}$
15. 27 fitas
16. 198 km
17. 10 livros de 7 cm e 12 livros de 3 cm

Unidade 5

Página 152

1. Não muda nada, segundo o princípio aditivo.
2. $5^2 + 2^2$
3. propriedade transitiva
4. não
5. sim; princípio aditivo
6. $x > 17$
7. sim; princípio multiplicativo
8. $x > -7$ **9.** $x > 5$

Página 154

1. Sim, pois representa uma desigualdade e tem um elemento desconhecido.
2. Embora represente uma desigualdade, não possui elemento desconhecido.
3. a) $1 - 4x$ (1º membro); $x + \frac{2}{3}$ (2º membro)
   b) $\frac{x}{2} - 1$ (1º membro); $\frac{x}{3} + \frac{1}{6}$ (2º membro)
4. a) não c) sim e) não
   b) sim d) sim f) sim
5. a) $2x + 7 > 20$
   b) $\frac{2}{3}x < 2y$
   c) $4x - 1 > 20$
   d) $x + \frac{4}{5}x < 1$
   e) $3x - \frac{1}{2}x > 1$
6. $4x > 20$
7. a) $x + y > 10$
   b) $3x < 5y$
8. a) $2x + 60 < 500$
   b) $30x > 300$
9. $x - 3 < \frac{1}{2}x$

Página 157

1. a) $x > 6$ g) $x \geqslant 4$
   b) $x < -5$ h) $x < \frac{1}{2}$
   c) $x > -13$ i) $x \geqslant 16$
   d) $x > 7$ j) $x < 1$
   e) $x \leqslant 1$ l) $x < -5$
   f) $x > 5$ m) $x > \frac{1}{2}$
2. $x > 11$
3. $2 \leqslant x < 5$
4. a) $x < \frac{4}{9}$ f) $x > \frac{4}{5}$
   b) $x > 9$ g) $x \geqslant \frac{1}{7}$
   c) $x > 9$ h) $x < 7$
   d) $x < \frac{5}{2}$ i) $x < 1$
   e) $x \leqslant -4$
5. pertence
6. $-6, -3, 0$

Explorando

Página 158

a) Nilton
b) Ana < R$ 6 mil; Nilton > R$ 24 mil; Ricardo = R$ 11 mil e Kátia < R$ 18 mil.
c) Não. Ricardo tem R$ 11 mil.
d) O máximo que Ana pode ter é a terça parte do máximo que Kátia pode ter.
f) Ricardo

Retomando o que aprendeu

Página 159

1. $x > 50$
2. $5x < -1$
3. $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x > -\frac{13}{6}\right\}$
4. $-3, 0, 5, 8$
5. $x > 2$ unidades
6. $x < \frac{9}{10}$
7. $-3, -2, -1$
8. 3
9. $S = \{0, 1, 2\}$
10. $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{5}{2}\right\}$
11. *d*
12. $x > 4,5$
13. verdadeira
14. -9 e -6
15. 13

Unidade 6

Página 166

1. a) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{3}$ g) $\frac{4}{3}$
   b) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{4}$ h) $\frac{1}{2}$
   c) $\frac{2}{1}$ f) $\frac{2}{3}$
2. a) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{2}{5}$
   b) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{2}{1}$
   c) $\frac{4}{5}$ f) $\frac{1}{5\,000\,000}$
3. a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{4}{1}$
4. $\frac{5}{4}$
5. $\frac{4}{5}$
6. a) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{9}$
   b) $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
7. $\frac{1}{8}$
8. $\frac{1}{2}$
9. 9 pênaltis
10. 75 000 habitantes
11. R$ 168,00
12. 8 m
13. 60 anos
14. $\frac{1}{4}$
15. a) 87,5 m² b) 437,5 m²

Explorando

Página 167

a) Campeonato Brasileiro de 1982
b) Campeonato Brasileiro de 1987
c) (2,69 + 2,47 + 2,76 + 2,69 + 2,40) : 5 = 2,602;
(1,89 + 2,21 + 2,29 + 2,53 + 2,40) : 5 = 2,264
d) 80 a 84

Página 171

1. 80 km/h
2. a) 76,6 km/h b) 92 km/h
3. 300 000 km/s
4. a) 95 km
   b) 190 km
   c) 237,5 km
5. 8,33 m/s
6. 1 : 60
7. 1 : 2 000 000
8. Norte: 2,6 hab/km²
   Nordeste: 27,2 hab/km²
   Sudeste: 67,3 hab/km²
   Sul: 38,1 hab/km²
   Centro-Oeste: 5,8 hab/km²
9. 5 cm
10. 2,7 kg/dm³
11. 4,2 g/cm³
12. a) Ailton: 6 m/s; Patrícia: 5 m/s
    b) 30 segundos

Explorando

Página 172

a) 172,8 km; 512 km
b) Em aproximadamente 3 vezes.
c) 4 256
d) 259,2 km

Página 175

1. a) 51% c) 6%
   b) 39% d) 12,7%
2. a) 55% e) 66,6%
   b) 140% f) 75%
   c) 210% g) 86,6%
   d) 50% h) 20%
3. a) 3% d) 62%
   b) 35% e) 4,5%
   c) 142% f) 22,5%
4. a) $\frac{11}{20}$ d) $\frac{6}{5}$
   b) $\frac{2}{25}$ e) $\frac{1}{25}$
   c) $\frac{1}{10}$ f) $\frac{3}{40}$
5. a) 0,81 c) 0,045
   b) 1,65 d) 0,111

Página 176

1. 85%
2. 37,5%
3. 5%
4. 23%
5. 89,3%
6. 48%
7. 45%

Página 182

1. a) sim c) não e) sim
   b) sim d) não
2. a) sim c) sim
   b) não d) sim
3. $x = 19,2$
4. a) 25 c) $\frac{1}{4}$
   b) 3 d) 1,8
5. a) $x = 2$
   b) $x = 3$
   c) $x = 30$
   d) $x = 8$
   e) $x = \frac{45}{4} = 11,25$
   f) $x = \frac{2}{9}$
   g) $x = 2$
   h) $x = 7$
6. 9 questões
7. 4 m
8. 260 km
9. 8 ovos
10. 1,8 m
11. $x = \frac{1}{3}$
12. a) sim c) sim
    b) não d) sim
13. 15 copos de água
14. 4 medidas
15. 5 cm e 3,75 cm
16. 7,5 m/s
17. a) 56 g b) 0,64 g

Página 189

1. $x = 20$ e $y = 12$
2. a) $a = 15$ e $b = 18$
   b) $a = 10$ e $b = 12$
3. 80 e 40
4. 60 e 36
5. a) $x = 30$ e $y = 60$
   b) $x = 56$ e $y = 24$
   c) $x = 60$ e $y = 48$
6. 35 e 20
7. a) $x = 90$ e $y = 75$
   b) $a = 60$ e $b = 48$
   c) $x = 40$ e $y = 100$
   d) $x = 48$, $y = 30$ e $z = 12$
   e) $a = 56$, $b = 24$, $c = 16$
8. 100° e 150°
9. 6ℓ de suco de limão e 15ℓ de água
10. a) $S = \{(90, 75)\}$
    b) $S = \{(14, 10)\}$
    c) $S = \{(15, 20)\}$
11. 9 estrangeiras e 27 brasileiras
12. 23,8 g de alumínio e 27,2 g de oxigênio.

Retomando o que aprendeu

Página 190

1. $\frac{4}{5}$
2. a) $\frac{2}{1}$ b) $\frac{1}{2}$
3. 1
4. mais, pois $\frac{10}{18} = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}$
5. 8 m/s
6. 430 km
7. 24 cm e 4 cm
8. 1 : 3 000
9. $x = \frac{1}{9}$
10. a) 11 b) 61
11. $x = 5$
12. $\frac{30}{31}$
13. 60 e 40
14. 81
15. 12 e 24
16. 21 e 35
17. 5 horas
18. 35,5 g
19. 12 cm, 18 cm e 24 cm
20. 5 m

Unidade 7

Página 198

1. a) sim c) não
   b) sim d) sim
2. $x = 10$ e $y = 18$
3. $x = 120$, $y = 36$
4. $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$
5. 90, 210 e 120
6. 200, 80 e 100
7. cobre: 28 kg, zinco: 12 kg
8. transportes: 1 500 reais; compras: 900 reais; hospedagem: 600 reais
9. 48 de chocolate, 12 de morango e 30 de flocos
10. 90 min, 120 min e 30 min
11. *A* recebeu 160 reais, *B* recebeu 100 reais e *C* recebeu 200 reais.
12. o primeiro: 6 300 reais; o segundo: 9 900 reais

Página 202

1. a) $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
   b) $\frac{600}{1500} = \frac{2}{5}$
   c) iguais
   d) diretamente proporcionais
2. a) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
   b) $\frac{15}{5} = 3$
   c) inversas
   d) inversamente proporcionais
3. a) $\frac{150}{200} = \frac{3}{4}$
   b) $\frac{300}{400} = \frac{3}{4}$
   c) iguais
   d) diretamente proporcionais
4. a) $8 \cdot 40 = 320$ cm²
   b) $6 \cdot 40 = 240$ cm²
   c) $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
   d) $\frac{320}{240} = \frac{4}{3}$
   e) iguais
   f) diretamente proporcionais
5. a) $\frac{60}{50} = \frac{6}{5}$
   b) $\frac{80}{96} = \frac{5}{6}$
   c) inversas
   d) inversamente proporcionais
6. a) diretamente proporcionais
   b) diretamente proporcionais
   c) inversamente proporcionais
   d) diretamente proporcionais
   e) diretamente proporcionais
   f) diretamente proporcionais

Página 205

1. 60 min ou 1 hora
2. 30 m
3. 420 páginas
4. 14 dias
5. 41 m

6. 14 cm
7. 60 km/h
8. 18 cm
9. 56 250 litros
10. 20 caminhões
11. 42,5 m/s
12. 40 dias
13. 14 peças
14. 108 km/h
15. 16 pessoas
16. 10 dias
17. 300 azulejos
18. 371 cm ou 3,71 m
19. 20 m

Página 208

1. 50 dias
2. 250 ℓ
3. 32 operários
4. 15 dias
5. 16 dias
6. 4 dias
7. 216 caixas

Retomando o que aprendeu

Página 209

1. sim
2. a = 21, b = 16
3. As parcelas são 80 e 100; o número é 380.
4. *A* receberá 120 reais, *B* receberá 300 reais e *C* receberá 180 reais.
5. $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{3}{2}$
6. 37 500 reais
7. 96, 36 e 90
8. 840 ℓ, 560 ℓ e 1 120 ℓ
9. 10 cm
10. a) 84 min b) 1 h 24 min
11. 25 m
12. 14 m
13. 43,925 cm
14. 40 latas
15. 837
16. 7 840 ℓ
17. 80 km/h
18. 270 recenseadores

Unidade 8

Página 216

1. 29%
2. Ele acerta 75 arremessos em cada 100.
3. ótimo: 42%
   bom: 37%
   regular: 10%
   ruim: 6%
   não assistiram: 5%
4. a) 60% d) 62,5%
   b) 30% e) 225%
   c) 85% f) 250%
5. a) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{11}{20}$ e) $\frac{3}{4}$
   b) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{3}{20}$ f) $\frac{9}{20}$
6. 45%
7. 76%
8. 35%
9. 34%
10. a) 10 d) 50% g) 70%
    b) 60% e) 30%
    c) 40% f) 80%
11. a) 0,01 d) 0,21 g) 2,60
    b) 0,09 e) 0,59 h) 0,024
    c) 0,16 f) 0,64 i) 0,204
12. a) $\frac{6}{100}$ 6% e) $\frac{214}{100}$ 214%
    b) $\frac{10}{100}$ 10% f) $\frac{8,5}{100}$ 8,5%
    c) $\frac{27}{100}$ 27% g) $\frac{1,3}{100}$ 1,3%
    d) $\frac{50}{100}$ 50% h) $\frac{215}{100}$ 21,5%

Explorando

Página 219

a) 384 000 km b) 96 000 km c) 4

Página 219

1. 22 140 votos
2. 24 970 reais
3. 45%
4. 37%
5. 36%
6. 750 reais
7. 1 600 m
8. 6 professores
9. a) 40 partidas b) 14 partidas
10. a) 60 alunos b) 33 alunos
11. 280,50 reais
12. a) 65% b) 35%
13. 60%
14. 62%
15. a) 9 900 habitantes
    b) 45 100 habitantes
16. 44%
17. a) 294 reais c) 168 reais
    b) 462 reais d) 40%
18. meninos: 40%
    meninas: 60%
19. 120 reais
20. Na loja 1, por 96 reais.

Explorando

Página 221

a) 97,1%
b) 39,7%
c) Rússia (118,2%)
d) Grã-Bretanha/Irlanda (39,7%)
e) 924,6%

Página 223

1. a) 78 reais
   b) 5 590 reais
2. a) 207 reais
   b) 96,04 reais
3. 2,5%
4. 15% ao mês
5. 760 reais
6. 24 500 reais

Retomando o que aprendeu

Página 224

1. 25%
2. 153,90 reais
3. a) 615 reais b) 2 665 reais
4. 47%
5. 0,35%
6. 55,68 reais
7. 0,12 ou 12%
8. 40%
9. a) 52% b) 48%
10. 16%
11. 15 000 reais
12. 30%
13. 50%
14. 50 ℓ
15. 3 500 ℓ
16. 15 meninos
17. a) 180 cm² b) 10 cm
18. 0,005

Unidade 9

Página 232

1. a) vértice: *B*
   lados: $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$
   b) vértice: *O*
   lados: $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{ON}$
2. AÔB, AÔC, BÔC
3. a) 20° d) 90° g) 70°
   b) 48° e) 120° h) 30°
   c) 55° f) 180°
4. a) 46° c) 130° e) 20°
   b) 130° d) 20° f) 90°
5. DÊF ≅ JL̂M e GĤI ≅ NÔP
7. 180° 8. 360°
9. x = 25° 10. x = 30°; 50°

Página 235

1. a) 1 080″ c) 10 800″
   b) 135″ d) 4 131″
2. a) 2 400′ c) 34′
   b) 757′ d) 59′
3. a) 1°35′10″ c) 12°4′31″
   b) 14°50′ d) 8°27″
4. a) 20°
   b) iguais
   c) 54 900″ = 15°15′
5. a) 1′20″ e) 2°31′30″
   b) 14′25″ f) 5°1′40″
   c) 3°20′ g) 10°1′10″
   d) 11° h) 33°31″

Página 237

1. a) 54°22′20″ f) 41°39″
   b) 25°4′30″ g) 9°12′11″
   c) 52°19′40″ h) 20°55′7″
   d) 47°2′2″ i) 125°47′11″
   e) 100°38″ j) 14°37′30″
2. a) 56°22′5″ c) 16°7′50″
   b) 6°56′
3. 7°39′35″
4. 28°27′15″
5. 36°15″
6. 25°6′40″
7. 52°41′46″
8. 110°30″
9. 141°35″
10. 84°49′40″

Página 242

1. Existem várias possibilidades de respostas.
2. a) AÔB e BÔC
   b) MP̂R e RP̂Q
   c) AÊD e DÊC
4. 37°30′
5. med $\left(A\hat{O}M\right)$ = 23° e
   med $\left(A\hat{O}B\right)$ = 46°
6. 70° 7. 90°
8. resposta pessoal

Página 247

1. a) 82° d) 45°
   b) 63° e) 1°
   c) 54°42′ f) 38°23′20″
2. a) 138° d) 161°17′
   b) 30° e) 5°
   c) 90° f) 58°17′23″
3. a) 90 − x
   b) 180 − x
   c) $\frac{180 - x}{2}$
   d) 5(180 − x)
   e) $\frac{3}{5}(90 - x)$
   f) $x + \frac{180 - x}{2}$
4. 16°30′
5. 45° 6. 65°
7. a) x = 55° d) x = 60°
   b) x = 40° e) x = 80°
   c) x = 49° f) x = 18°
8. x = y = 45°
9. med $\left(A\hat{O}C\right)$ = 50°
10. 53°
11. 86°10′
12. 135°
13. x = 25°
14. 75°
15. 70° e 20°

Página 251

1. a) *x* e *z*, *w* e *y*
   b) *x* e *y*, *y* e *z*, *z* e *w*, *w* e *x*
2. 45°, 135° e 135°
3. a) x = 60° b) x = 8°
4. 20°20′
5. a) x = a = 70°
      y = 110°
   b) x = 45°
      y = 135°
      a = b = 90°
   c) x = 30°
      y = b = 130°
   d) x = 30°
      y = 120°

Explorando

Página 253

a) 8 dobras
b)

4	90°
8	45°
16	22,5°

Retomando o que aprendeu

Página 253

1. 45°
2. x = 27°
3. a) 75°43′21″
   b) 59°19′8″
   c) 28°
4. med $\left(A\hat{O}C\right)$ = 39°14′20″
5. a) 158°32′41″
   b) 47°48′52″
6. 6°52′40″
7. 11°39′57″
8. med $\left(A\hat{O}C\right)$ = 18°9′27″,
   med $\left(B\hat{O}C\right)$ = 6°3′9″
9. 21°10′40″
10. complemento: 52°31′10″; suplemento: 142°31′10″
11. 155°30′
12. 51°
13. 32° e 58°
14. a) 20° b) 50° c) 140°
15. 67°30′ e 112°30′
16. 140°
17. 112°, 68°, 68°

Unidade 10

Página 262

1. a) escaleno
   b) eqüilátero
   c) isósceles
2. a) acutângulo
   b) retângulo
   c) obtusângulo
3. 90°
4. Não, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.
5. a) 45° c) 82°
   b) 60° d) 59°
6. 65°
7. a) 12°, 48° e 120°
   b) obtusângulo

Explorando

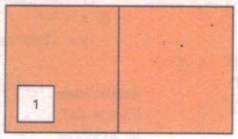
Página 265

d) A soma das medidas dos ângulos Â, B̂, Ĉ e D̂ é 360°.
e) A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°.

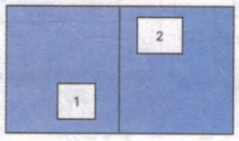
Página 265

1. Não, pois os lados opostos não são paralelos.
2. 360°
3. a = 60°, b = 60°, c = 120°, d = 120°, a + b + c + d = 360°
4. triângulos isósceles e retângulos

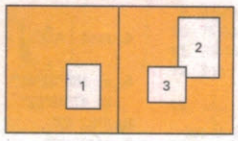
Créditos das páginas de abertura



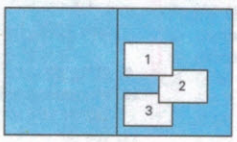
Página 22
Foto 1: Theodor de Bry. Século XVI



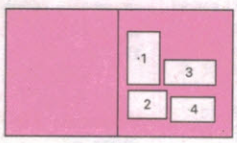
Páginas 74 e 75
Foto 1: Delfim Martins/Pulsar
Foto 2: Assis Hoffmann/Abril Imagens



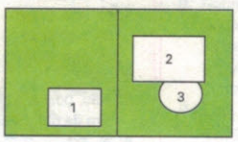
Páginas 102 e 103
Foto 1: c. 1650 a.C. Trustees of the British Museum, Londres
Foto 2: Fabiano Ramos/Folha Imagem
Foto 3: Corel Stock Photo



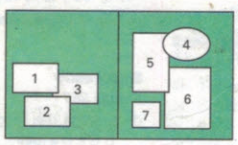
Página 149
Fotos 1 e 3: Delfim Martins/Pulsar
Foto 2: Juca Martins/Pulsar



Página 163
Fotos 1 e 4: Manoel Novaes
Foto 2: Christian Knepper/Reflexo
Foto 3: Juca Martins/Pulsar



Páginas 192 e 193
Foto 1: Jacek Iwanicki/Kino
Foto 2: Corel Stock Photo
Foto 3: Marinez Maravalhas Gomes



Páginas 226 e 227
Fotos 1 a 7: Corel Stock Photo

Agradecimentos – apoio para produção das fotos

– Toca – Comércio, Colocações e Forrações Ltda.
– Yellow Paper – Bazar e Papelaria

Impresso nas oficinas da EDITORA FTD SA